



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JULIOL 2023	CONVOCATORIA: JULIO 2023
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. II

BAREMO DEL EXAMEN: Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcular la matriz A^2 y su inversa. (5 puntos)
b) Resolver la ecuación matricial $2A^2X = 4B$. (5 puntos)

Problema 2. Un millonario ha dejado en herencia todo su dinero a sus tres hijas. A la hija mayor le ha dejado 9 millones de euros más la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija mediana le ha dejado la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija pequeña le ha dejado el 35% de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. ¿Cuánto dinero ha dejado el millonario a cada una de sus hijas?

(Planteamiento correcto 5 puntos-Resolución correcta 5 puntos)

Problema 3. Se considera la función $f(x) = \frac{4x-5}{2(x^2-1)}$. Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
d) Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Problema 4. El consumo de energía (en Mwh) en una empresa metalúrgica a las x horas de un día viene dado por la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 14, & \text{si } x \in [0, 6] \\ -x^2 + 24x - 82, & \text{si } x \in]6, 18] \\ -x + 34, & \text{si } x \in]18, 24] \end{cases}$$

- a) Estudia la continuidad de esta función en el intervalo $[0, 24]$. (3 puntos)
- b) Determina a qué horas del día el consumo alcanza sus valores máximo y mínimo. ¿Cuáles son dichos valores? (4 puntos)
- c) Planteando la integral adecuada, calcula el consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana. (3 puntos)

Problema 5. Una estación espacial internacional cuenta con un grupo de especialistas en ingeniería y con otro de especialistas en ciencias. El grupo de especialistas en ingeniería está compuesto por 10 especialistas de América y 20 de Europa, entre los cuales 7 y 9 son mujeres, respectivamente. El grupo de especialistas en ciencias está formado por 21 especialistas de América y 19 de Europa, entre los cuales 12 y 10 son mujeres, respectivamente. Se elige un integrante de la estación espacial al azar.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Europa? (2 puntos)
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y especialista en ciencias? (2 puntos)
- c) Si se ha elegido una mujer, ¿es más probable que sea especialista en ciencias o en ingeniería? (3 puntos)
- d) ¿Son independientes los sucesos “ser mujer” y “ser especialista en ingeniería”? (3 puntos)

Problema 6. En una población hay dos compañías, A y B , que proporcionan el servicio de internet. La compañía A proporciona servicio al 70% de los hogares que han contratado el servicio de internet. El 65% de los hogares que han contratado el servicio de internet tienen contratado también el servicio de televisión de pago. Sabemos que la mitad de los clientes de la compañía B ha contratado televisión de pago.

- a) Calcula el porcentaje de hogares que no han contratado el servicio de televisión de pago y tienen contratado el servicio de internet con la compañía A . (3 puntos)
- b) Si en un hogar se ha contratado el servicio de internet, pero no el servicio de televisión de pago, ¿cuál es la probabilidad de que sea cliente de la compañía B ? (4 puntos)
- c) Sea A el suceso “ser cliente de la compañía A ” y C el suceso “haber contratado la televisión de pago”. Calcula $P(A \cup C)$. (3 puntos)

Soluciones

Problema 1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcular la matriz A^2 y su inversa.

(5 puntos)

b) Resolver la ecuación matricial $2A^2X = 4B$.

(5 puntos)

a) Determinamos la expresión de la matriz A^2 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 1+2+0 & 0-2+0 \\ 0+0+2 & 0+4-0 & 0-4-2 \\ -1+0-1 & -1+0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que la matriz A^2 tiene inversa y la calculamos.

$$|A^2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 36 + 4 - 16 - 6 - 6 = 16 \neq 0 \rightarrow \text{Existe la inversa}$$

$$(A^2)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A^2)^T)}{|A^2|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & -6 & 1 \end{pmatrix}}{16} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A^2)^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$2A^2X = 4B \Rightarrow A^2X = 2B \Rightarrow X = 2(A^2)^{-1}B$$

Sustituimos y determinamos la matriz X.

$$X = 2(A^2)^{-1}B = 2 \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -6+1+0 & 4-4+0 & -2-2-10 \\ 30+3+0 & -20-12+0 & 10-6+2 \\ 18+5+0 & -12-20+0 & 6-10-2 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -5 & 0 & -14 \\ 33 & -32 & 6 \\ 23 & -32 & -6 \end{pmatrix}$$

Problema 2. Un millonario ha dejado en herencia todo su dinero a sus tres hijas. A la hija mayor le ha dejado 9 millones de euros más la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija mediana le ha dejado la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija pequeña le ha dejado el 35% de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. ¿Cuánto dinero ha dejado el millonario a cada una de sus hijas?

(Planteamiento correcto 5 puntos-Resolución correcta 5 puntos)

Llamamos “x” al dinero que recibe la hija mayor, “y” a lo que recibe la mediana y “z” lo que recibe la menor.

“A la hija mayor le ha dejado 9 millones de euros más la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos” $\rightarrow x = 9 + \frac{y+z}{2}$

“A la hija mediana le ha dejado la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos” $\rightarrow y = \frac{x+z}{2}$

“A la hija pequeña le ha dejado el 35% de la suma de lo que ha dejado a las otras dos” $\rightarrow z = 0.35(x+y)$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x = 9 + \frac{y+z}{2} \\ y = \frac{x+z}{2} \\ z = 0.35(x+y) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x = 18 + y + z \\ 2y = x + z \\ 100z = 35x + 35y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - y - z = 18 \\ x - 2y + z = 0 \\ 20z = 7x + 7y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - y - z = 18 \\ x = 2y - z \\ 20z = 7x + 7y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2(2y - z) - y - z = 18 \\ 20z = 7(2y - z) + 7y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y - 2z - y - z = 18 \\ 20z = 14y - 7z + 7y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y - 3z = 18 \\ 27z = 21y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y - z = 6 \rightarrow y = 6 + z \\ 9z = 7y \end{array} \right\} \Rightarrow 9z = 7(6 + z) \Rightarrow 9z = 42 + 7z \Rightarrow 2z = 42 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{42}{2} = 21} \Rightarrow \boxed{y = 6 + 21 = 27} \Rightarrow \boxed{x = 2 \cdot 27 - 21 = 33}$$

El millonario le ha dejado 33 millones de euros a su hija mayor, 27 millones a la mediana y 21 millones a la menor.

Problema 3. Se considera la función $f(x) = \frac{4x-5}{2(x^2-1)}$. Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- d) Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

- a) El dominio de la función racional son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

Dominio $f(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Puntos de corte con el eje OY:

$$f(x) = \frac{4x-5}{2(x^2-1)} \Bigg|_{x=0} \Rightarrow f(0) = \frac{4 \cdot 0 - 5}{2(0^2 - 1)} = 2.5 \Rightarrow A(0, 2.5)$$

Puntos de corte con el eje OX:

$$f(x) = \frac{4x-5}{2(x^2-1)} \Bigg|_{y=0} \Rightarrow \frac{4x-5}{2(x^2-1)} = 0 \Rightarrow 4x-5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{4} = 1.25 \Rightarrow B(1.25, 0)$$

Los puntos de corte con los ejes son: A(0, 2.5) y B(1.25, 0).

- b) **Asíntota vertical.** $x = a$

¿ $x = -1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x-5}{2(x^2-1)} = \frac{4(-1)-5}{2((-1)^2-1)} = \frac{-9}{0} = \infty$$

$x = -1$ es asíntota vertical

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x-5}{2(x^2-1)} = \frac{4(1)-5}{2(1^2-1)} = \frac{-1}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-5}{2(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{2\left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x} - \frac{5}{x^2}}{2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\frac{4}{\infty} - \frac{5}{\infty}}{2\left(1 - \frac{1}{\infty}\right)} = \frac{0}{2} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal.

c) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x) = \frac{4x-5}{2(x^2-1)} = \frac{4x-5}{2x^2-2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(4)(2x^2-2) - (4x-5)(4x-5)}{(2x^2-2)^2} =$$

$$= \frac{8x^2-8-16x^2+20x}{(2x^2-2)^2} = \frac{-8x^2+20x-8}{(2x^2-2)^2} = \frac{4(-2x^2+5x-2)}{4(x^2-1)^2} = \frac{-2x^2+5x-2}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x^2+5x-2}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow -2x^2+5x-2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-2)(-2)}}{2(-2)} = \frac{-5 \pm 3}{-4} = \begin{cases} \frac{-5+3}{-4} = \boxed{\frac{1}{2}} = x \\ \frac{-5-3}{-4} = \boxed{2} = x \end{cases}$$

Averiguamos el signo de la derivada antes, entre y después de -1 (excluido del dominio), 0.5 (punto crítico), 1 (excluido del dominio) y 2 (punto crítico).

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{-2(-2)^2 + 5(-2) - 2}{((-2)^2 - 1)^2} = \frac{-20}{+} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $(-1, 0.5)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{-2}{(0^2 - 1)^2} = -2 < 0$. La

función decrece en $(-1, 0.5)$.

- En el intervalo $(0.5, 1)$ tomamos $x = 0.9$ y la derivada vale

$$f'(0.9) = \frac{-2 \cdot 0.9^2 + 5 \cdot 0.9 - 2}{(0.9^2 - 1)^2} = \frac{0.88}{+} > 0. \text{ La función crece en } (0.5, 1).$$

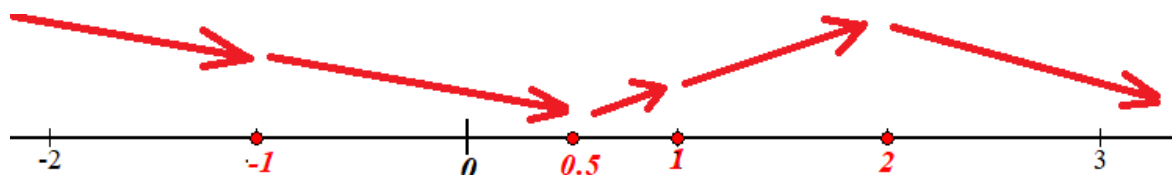
- En el intervalo $(1, 2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale

$$f'(1.5) = \frac{-2 \cdot 1.5^2 + 5 \cdot 1.5 - 2}{(1.5^2 - 1)^2} = \frac{1}{+} > 0. \text{ La función crece en } (1, 2).$$

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{-2 \cdot 3^2 + 15 - 2}{(3^2 - 1)^2} = \frac{-5}{64} < 0$

. La función decrece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



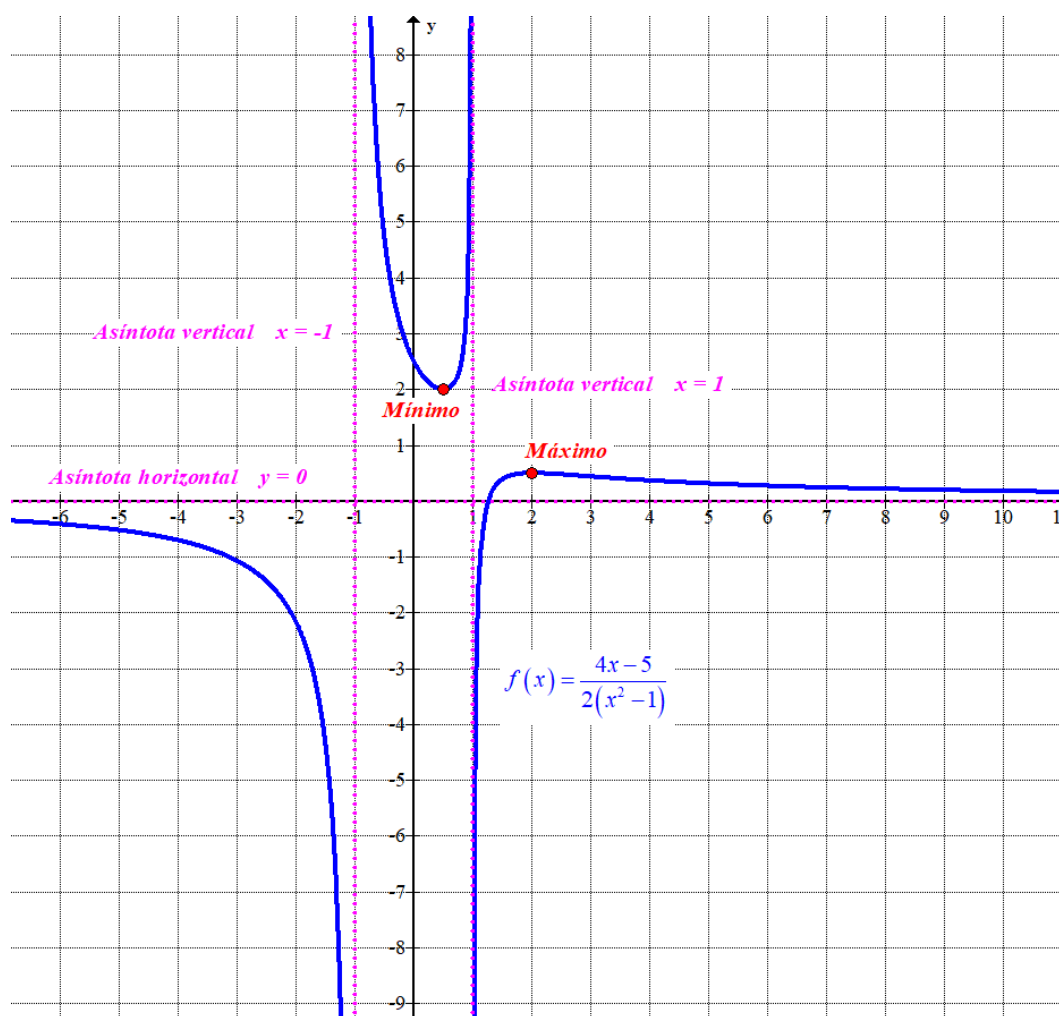
La función decrece en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0.5)$ y crece en $(0.5, 1) \cup (1, 2)$.

- d) Observando el esquema de evolución de la función podemos afirmar que la función tiene un mínimo local en $x = 0.5$ y un máximo local en $x = 2$.

Como $f(0.5) = \frac{4 \cdot 0.5 - 5}{2(0.5^2 - 1)} = 2$ y $f(2) = \frac{4 \cdot 2 - 5}{2(2^2 - 1)} = 0.5$ las coordenadas del mínimo local son $(0.5, 2)$ y del máximo local son $(2, 0.5)$

- e) Para realizar la representación gráfica hacemos una tabla de valores.

x	$f(x) = \frac{4x-5}{2(x^2-1)}$
-2	-2.16
0	2.5
0.5	2 Mínimo
0.8	2.5
1.5	0.4
2	0.5 Máximo
3	0.43
4	0.36



Problema 4. El consumo de energía (en Mwh) en una empresa metalúrgica a las x horas de un día viene dado por la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+14, & \text{si } x \in [0,6] \\ -x^2+24x-82, & \text{si } x \in]6,18] \\ -x+34, & \text{si } x \in]18,24] \end{cases}$$

- a) Estudia la continuidad de esta función en el intervalo $[0,24]$. (3 puntos)
 b) Determina a qué horas del día el consumo alcanza sus valores máximo y mínimo. ¿Cuáles son dichos valores? (4 puntos)
 c) Planteando la integral adecuada, calcula el consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana. (3 puntos)

- a) La función en cada intervalo es continua por ser expresiones de funciones polinómicas. Para que sea continua debe serlo en los cambios de definición: $x = 6$ y $x = 18$.

¿Es continua en $x = 6$?

$$\left. \begin{aligned} f(6) &= 2 \cdot 6 + 14 = 26 \\ \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 6^-} 2x + 14 = 26 \\ \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 6^+} -x^2 + 24x - 82 = -6^2 + 24 \cdot 6 - 82 = 26 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(6) = \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = 26$$

La función es continua en $x = 6$.

¿Es continua en $x = 18$?

$$\left. \begin{aligned} f(18) &= -18^2 + 24 \cdot 18 - 82 = 26 \\ \lim_{x \rightarrow 18^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 18^-} -x^2 + 24x - 82 = 26 \\ \lim_{x \rightarrow 18^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 18^+} -x + 34 = -18 + 34 = 16 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(18) = \lim_{x \rightarrow 18^-} f(x) = 26 \neq 16 = \lim_{x \rightarrow 18^+} f(x)$$

La función no es continua en $x = 18$.

Resumiendo: La función es continua en $[0,18) \cup (18,24]$.

- b) En el intervalo $[0, 6]$ la función es $f(x) = 2x + 14$ que es una función lineal con pendiente $2 > 0$, por lo que es creciente.
 En el intervalo $(6, 18]$ la función es $f(x) = -x^2 + 24x - 82$ que es una función parabólica. Derivamos e igualamos a cero en busca de su vértice.

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= -2x + 24 \\ f'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2x + 24 = 0 \Rightarrow x = \frac{24}{2} = 12 \in (6, 18]$$

En $x = 12$ hay un máximo relativo pues la segunda derivada es negativa.

$$f''(x) = -2 \Rightarrow f''(12) = -2 < 0$$

En el intervalo $[0, 6]$ la función es $f(x) = -x + 34$ que es una función lineal con pendiente $-1 < 0$, por lo que es decreciente.

Valoramos la función en 0, 6, 12, 18 y 24 en busca de su valor máximo y mínimo.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 2 \cdot 0 + 14 = 14 \\ f(6) &= 2 \cdot 6 + 14 = 26 \\ f(12) &= -12^2 + 24 \cdot 12 - 82 = 62 \text{ ;Máximo!} \\ f(18) &= -18^2 + 24 \cdot 18 - 82 = 26 \\ f(24) &= -24 + 34 = 10 \text{ ;Mínimo!} \end{aligned} \right\}$$

El consumo máximo se produce a las 12 horas y el mínimo a las 24 horas.

El máximo consumo es de 62 Mwh y el mínimo de 10 Mwh.

c) En el intervalo $[8, 10]$ la función es $f(x) = -x^2 + 24x - 82$.

Comprobamos si la función corta el eje en dicho intervalo.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 24x - 82 \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -x^2 + 24x - 82 = 0 \Rightarrow x = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4(-1)(-82)}}{2(-1)}$$

$$x = \frac{-24 \pm 2\sqrt{62}}{-2} = \begin{cases} \frac{-24 + 2\sqrt{62}}{-2} = 12 - \sqrt{62} \approx 4.1 \notin (8, 10] \\ \frac{-24 - 2\sqrt{62}}{-2} = 12 + \sqrt{62} \approx 19.87 \notin (8, 10] \end{cases}$$

El consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana es el valor de la integral definida entre 8 y 10 de la función.

$$\text{Consumo} = \int_8^{10} f(x) dx = \int_8^{10} -x^2 + 24x - 82 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 12x^2 - 82x \right]_8^{10} =$$

$$= \left[-\frac{10^3}{3} + 12 \cdot 10^2 - 82 \cdot 10 \right] - \left[-\frac{8^3}{3} + 12 \cdot 8^2 - 82 \cdot 8 \right] =$$

$$= -\frac{1000}{3} + 1200 - 820 + \frac{512}{3} - 768 + 656 = \boxed{\frac{316}{3} \approx 105.33 \text{ Mwh}}$$

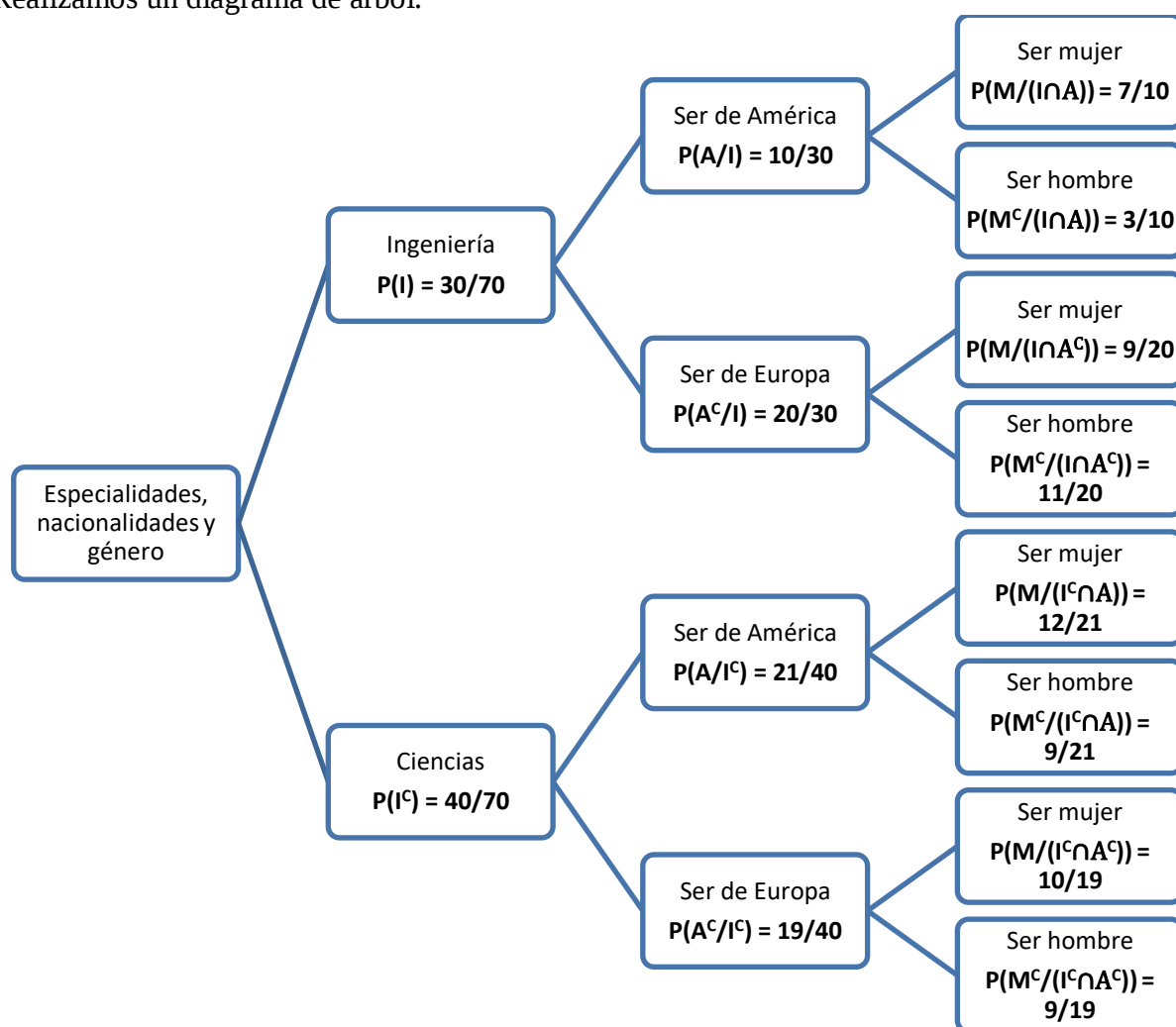
El consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana es, aproximadamente, de 105.33 Mwh.

Problema 5. Una estación espacial internacional cuenta con un grupo de especialistas en ingeniería y con otro de especialistas en ciencias. El grupo de especialistas en ingeniería está compuesto por 10 especialistas de América y 20 de Europa, entre los cuales 7 y 9 son mujeres, respectivamente. El grupo de especialistas en ciencias está formado por 21 especialistas de América y 19 de Europa, entre los cuales 12 y 10 son mujeres, respectivamente. Se elige un integrante de la estación espacial al azar.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Europa? (2 puntos)
 b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y especialista en ciencias? (2 puntos)
 c) Si se ha elegido una mujer, ¿es más probable que sea especialista en ciencias o en ingeniería? (3 puntos)
 d) ¿Son independientes los sucesos “ser mujer” y “ser especialista en ingeniería”? (3 puntos)

a) Llamamos I al suceso “Ser especialista en ingeniería”, A al suceso “ser de América” y M al suceso “Ser mujer”.

Hay $10 + 20 = 30$ especialistas de ingeniería y $21 + 19 = 40$ especialistas en ciencias. Un total de 70 especialistas. De los 70 especialistas son $7 + 9 + 12 + 10 = 38$ mujeres y $70 - 38 = 32$ hombres. Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(A^c)$. Aplicamos regla de Laplace. Hay 70 especialistas y $20 + 19 = 39$ son de Europa.

$$P(A^c) = \frac{39}{70} \approx 0.5571$$

- b) Nos piden calcular $P(M^c \cap I^c)$. Observando los datos del diagrama de árbol este suceso se cumple en dos de sus ramas (la última y la antepenúltima)

$$P(M^c \cap I^c) = P(I^c \cap A \cap M^c) + P(I^c \cap A^c \cap M^c) =$$

$$= \frac{40}{70} \cdot \frac{21}{40} \cdot \frac{9}{21} + \frac{40}{70} \cdot \frac{19}{40} \cdot \frac{9}{19} = \frac{9}{70} + \frac{9}{70} = \boxed{\frac{9}{35} \approx 0.2571}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Se puede resolver aplicando la regla de Laplace. De los 70 especialistas hay $40 - (12 + 10) = 18$ que son hombres de ciencias.

$$P(M^c \cap I^c) = \frac{18}{70} = \boxed{\frac{9}{35} \approx 0.2571}$$

- c) Calculamos las dos probabilidades $P(I/M)$ y $P(I^c/M)$ y comparamos estos valores. Calculamos $P(I/M)$. Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(I/M) = \frac{P(I \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{7+9}{70}}{\frac{7+9+12+10}{70}} = \frac{16}{38} = \boxed{\frac{8}{19} \approx 0.4211}$$

Calculamos $P(I^c/M)$. Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(I^c/M) = \frac{P(I^c \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{12+10}{70}}{\frac{7+9+12+10}{70}} = \frac{22}{38} = \boxed{\frac{11}{19} \approx 0.5789}$$

Como $P(I^c/M) = \frac{11}{19} \geq \frac{8}{19} = P(I/M)$ es más probable que la mujer elegida sea del grupo de especialistas de ciencias.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Hay $7 + 9 = 16$ mujeres en el grupo de especialistas de ingeniería y $10 + 12 = 22$ en el grupo de especialistas de ciencias. Por lo que es más probable que la mujer sea del grupo de ciencias por tener más mujeres dicho grupo.

- d) ¿Son independientes los sucesos M = “ser mujer” e I = “ser especialista en ingeniería”? Para que se cumpla debe cumplirse que $P(M \cap I) = P(M)P(I)$.

$$\left. \begin{aligned} P(M \cap I) &= \frac{7+9}{70} = \frac{16}{70} = \frac{1120}{4900} \\ P(M)P(I) &= \frac{7+9+12+10}{70} \cdot \frac{30}{70} = \frac{1140}{4900} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(M \cap I) = \frac{1120}{4900} \neq \frac{1140}{4900} = P(M)P(I)$$

Los sucesos “ser mujer” y “ser especialista en ingeniería” no son independientes.

Problema 6. En una población hay dos compañías, A y B , que proporcionan el servicio de internet. La compañía A proporciona servicio al 70% de los hogares que han contratado el servicio de internet. El 65% de los hogares que han contratado el servicio de internet tienen contratado también el servicio de televisión de pago. Sabemos que la mitad de los clientes de la compañía B ha contratado televisión de pago.

- a) Calcula el porcentaje de hogares que no han contratado el servicio de televisión de pago y tienen contratado el servicio de internet con la compañía A . (3 puntos)
- b) Si en un hogar se ha contratado el servicio de internet, pero no el servicio de televisión de pago, ¿cuál es la probabilidad de que sea cliente de la compañía B ? (4 puntos)
- c) Sea A el suceso “ser cliente de la compañía A ” y C el suceso “haber contratado la televisión de pago”. Calcula $P(A \cup C)$. (3 puntos)

Llamamos A = “Tener contratado el servicio de internet con la compañía A ”, B = “Tener contratado el servicio de internet con la compañía B ” y C = “Tener contratada la televisión de pago”.

Hacemos una tabla de contingencia para obtener de forma rápida todos los datos necesarios para responder a las preguntas del ejercicio.

	Televisión de pago	Sin televisión de pago	
Internet con A			70
Internet con B			30
Totales	65		100

La mitad de los clientes de la compañía B (30%) ha contratado televisión de pago $\rightarrow$ 15% de las personas con conexión a internet están con la compañía B y con televisión de pago. Completamos la tabla.

	Televisión de pago (C)	Sin televisión de pago	
Internet con A	50	20	70
Internet con B	15	15	30
Totales	65	35	100

- a) Representan un 20% de las personas con contrato de internet.

	Televisión de pago	Sin televisión de pago	
Internet con A	50	20	70
Internet con B	15	15	30
Totales	65	35	100

- b) Nos piden $P(B/\bar{C})$

$$P(B/\bar{C}) = \frac{P(B \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7} \approx 0.4286$$

- c)

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{70}{100} + \frac{65}{100} - \frac{50}{100} = \frac{85}{100} = 0.85$$