

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2022-2023 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	
---	---	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. (2 puntos) Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.
- Determine la matriz X tal que

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A.2. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = 6x^2 + ae^x - 2, \quad a \in \mathbb{R}$$

- Obtenga el valor del parámetro real a sabiendo que $\int_0^1 f(x) dx = e - 1$.
- Para $a = 1$, obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

A.3. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} -x^4 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2 + 1}{x + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- Indique el dominio de la función $f(x)$ y analice su continuidad, señalando el tipo de discontinuidad si la presenta.
- Determine las asíntotas de la función anterior.

A.4. (2 puntos) Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,55$ y $P(B) = 0,1$. Además, se sabe que $P(\bar{B}/A) = 0,89$, donde $\bar{B}$ es el suceso complementario de B. Calcule las siguientes probabilidades:

- $P(A \cap B)$.
- $P(\bar{A} \cap \bar{B})$, siendo $\bar{A}$ el suceso complementario de A.

A.5. (2 puntos) La capacidad en mililitros de un bote de champú se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 10 ml.

- a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 200 ml. Determine un intervalo de confianza del 95% para la capacidad media de los botes de champo.
- b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0,5 mililitros, con un nivel de confianza del 90%.

B.1. (2 puntos) Una pastelería tiene 220 buñuelos de chocolate, nata y crema. Hay el doble de buñuelos de nata que de crema. Además, el doble de la cantidad de los buñuelos de crema más el triple de los buñuelos de chocolate es igual al doble de la cantidad de los buñuelos de nata. Calcule la cantidad de buñuelos que hay de cada tipo.

B.2. (2 puntos) Se desea producir pintura verde en dos tonalidades, VERDE1 y VERDE2, mezclando pintura azul y amarilla en distintas proporciones. Un litro de pintura VERDE1 necesita 0,3 litros de azul y 0,7 litros de amarillo, mientras que un litro de pintura VERDE2 necesita 0,5 litros de azul y 0,5 litros de amarillo. Actualmente se dispone de 20 litros de azul y 28 litros de amarillo. El beneficio por litro de la pintura VERDE1 es de 1 euro, y por litro de pintura VERDE2 es de 1,2 euros. No se pueden producir más de 30 litros de pintura VERDE1. ¿Cuántos litros de pintura VERDE1 y VERDE2 debe producir para maximizar sus beneficios? ¿Cuál será el beneficio obtenido?

B.3. (2 puntos) Se consideran las siguientes funciones reales de variable real:

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x, \quad g(x) = 4x$$

- a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.
- b) Calcule el área de la región acotada limitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el primer cuadrante del plano cartesiano.

B.4. (2 puntos) El Ministerio de Educación y Formación Profesional convoca regularmente unas ayudas al estudio. En el curso 2019-2020 las ayudas destinadas a las Enseñanzas Obligatorias representaron el 56,5% del total, el 24% correspondieron a Enseñanzas Universitarias, mientras que el 19,5% restante fueron para Enseñanzas Postobligatorias No Universitarias. Las ayudas concedidas son financiadas o bien por el ministerio o bien por la Comunidad Autónoma a la que pertenece el estudiante. Concretamente, en el curso 2019-2020, las ayudas financiadas por el ministerio representaron el 13,8% del total de ayudas de Enseñanzas Obligatorias, el 86,1% de las Universitarias y el 80,3% de las Postobligatorias No Universitarias. Eligiendo una ayuda al estudio al azar de las anteriormente descritas, calcule la probabilidad de que:

- a) Sea financiada por el ministerio.
- b) La ayuda sea de Enseñanza Obligatoria, sabiendo que ha sido financiada por el ministerio.

B.5. (2 puntos) El 30% de los individuos de una población tienen una titulación universitaria. Se escoge una muestra al azar de 120 individuos.

- a) ¿Cuál es la distribución aproximada que sigue la proporción de individuos con titulación universitaria de la muestra?
- b) Halle la probabilidad de que más del 35% de los individuos de la muestra sean titulados universitarios.

SOLUCIONES

A.1. (2 puntos) Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.
 b) Determine la matriz X tal que

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) La matriz A es invertible si su determinante es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 1 + 2 + 0 = 2 \neq 0$$

Tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

- b) Despejamos X en la ecuación.

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de X.

$$X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ -1 + 0 + 1 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$3 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 1 \rightarrow 3 \times 1$

A.2. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = 6x^2 + ae^x - 2, \quad a \in \mathbb{R}$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a sabiendo que $\int_0^1 f(x) dx = e - 1$.

b) Para $a = 1$, obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

a) Calculamos la integral indefinida.

$$\int f(x) dx = \int 6x^2 + ae^x - 2 dx = 6 \frac{x^3}{3} + ae^x - 2x = 2x^3 + ae^x - 2x + K$$

Calculamos la integral definida.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \left[2x^3 + ae^x - 2x \right]_0^1 = \left[2 \cdot 1^3 + ae^1 - 2 \cdot 1 \right] - \left[2 \cdot 0^3 + ae^0 - 2 \cdot 0 \right] = \\ &= 2 + ae - 2 - a = ae - a = a(e - 1) \end{aligned}$$

Hacemos que este resultado obtenido sea igual a $e - 1$.

$$a(e - 1) = e - 1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

El valor buscado es $a = 1$.

b) Para $a = 1$ la función queda $f(x) = 6x^2 + e^x - 2$.

La recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ tiene la ecuación $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 6 \cdot 0^2 + e^0 - 2 = -1 \\ f'(x) &= 12x + e^x \rightarrow f'(0) = 12 \cdot 0 + e^0 = 1 \\ y - f(0) &= f'(0)(x - 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - (-1) = (1)(x) \Rightarrow \boxed{y = x - 1}$$

A.3. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x^4}{x^2+1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2+1}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Indique el dominio de la función $f(x)$ y analice su continuidad, señalando el tipo de discontinuidad si la presenta.

b) Determine las asíntotas de la función anterior.

a) Es una función a trozos. Para $x \leq 0$ la función es $f(x) = \frac{-x^4}{x^2+1}$. Como el denominador no se anula la función existe

Para $x > 0$ la función es $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$. Como el denominador se anula en $x = -1$, pero este valor no está en el dominio la función existe.

Domino $f(x) = \mathbb{R}$

La función es continua para $x \leq 0$ y para $x > 0$ pues está definida como fracciones polinómicas cuyo denominador no se anula. Falta comprobar si es continua en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{-0^4}{0^2+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^4}{x^2+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{0^2+1}{0+1} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

La función es discontinua en $x = 0$, presentando una discontinuidad inevitable de salto finito.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b)

Asíntota vertical. $x = a$

El dominio de la función son todos los reales. Por lo que no presenta asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x+1} = \{\text{Grado del numerador} > \text{grado del denominador}\} = +\infty$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^4}{x^2+1} = \{\text{Grado del numerador} > \text{grado del denominador}\} = -\infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$.

Estudiamos la posibilidad de asíntota en $-\infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{-x^4}{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^4}{x^3+x} =$$

$$= \{\text{Grado del numerador} > \text{grado del denominador}\} = +\infty$$

No existe asíntota oblicua en $-\infty$

Estudiamos la posibilidad de asíntota en $+\infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x^2+x} =$$

$$= \{\text{Grado del numerador} = \text{grado del denominador}\} = \frac{1}{1} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}-x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{x-1} =$$

$$= \{\text{Grado del numerador} = \text{grado del denominador}\} = \frac{-1}{1} = -1$$

La asíntota oblicua en $+\infty$ tiene ecuación $y = x - 1$.

A.4. (2 puntos) Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,55$ y $P(B) = 0,1$. Además, se sabe que $P(\bar{B} / A) = 0,89$, donde $\bar{B}$ es el suceso complementario de B. Calcule las siguientes probabilidades:

a) $P(A \cap B)$.

b) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$, siendo $\bar{A}$ el suceso complementario de A.

a)

$$P(\bar{B} / A) = 0,89 \Rightarrow \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = 0,89 \Rightarrow \frac{P(\bar{B} \cap A)}{0,55} = 0,89 \Rightarrow P(\bar{B} \cap A) = 0,55 \cdot 0,89 = 0,4895$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow 0,55 = P(A \cap B) + 0,4895 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0,55 - 0,4895 = 0,0605}$$

b) Aplicando las leyes de Morgan.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) =$$

$$= 1 - (0,55 + 0,1 - 0,0605) = \boxed{0,4105}$$

A.5. (2 puntos) La capacidad en mililitros de un bote de champú se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 10 ml.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 200 ml. Determine un intervalo de confianza del 95% para la capacidad media de los botes de champú.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0,5 mililitros, con un nivel de confianza del 90%.

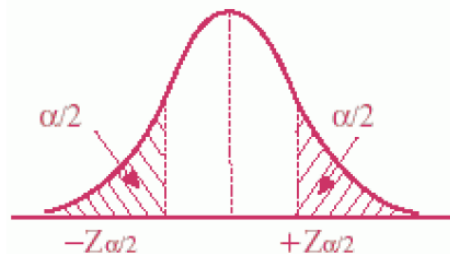
X = “La capacidad en mililitros de un bote de champú”

$X = N(\mu, 10)$

Tamaño de muestra es $n = 20$ y la media muestral es $\bar{x} = 200$

Calculamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95 %.

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \alpha / 2 = 0.025 \Rightarrow 1 - \alpha / 2 = 0.975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9716	0.9719	0.9722	0.9725	0.9728	0.9730

Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{20}} \approx 4.383$$

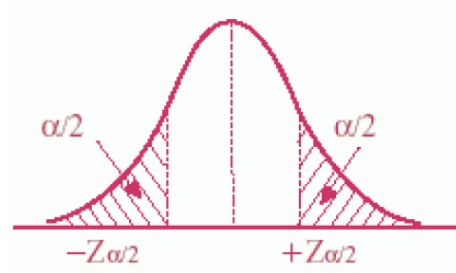
El intervalo de confianza es

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (200 - 4.383, 200 + 4.383) = (195.617, 204.383)$$

a)

Calculamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 90 %

$$1 - \alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 0.10 \Rightarrow \alpha / 2 = 0.05 \Rightarrow 1 - \alpha / 2 = 0.95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$$



Igualamos el error a 0.5.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5 = 1.645 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.645 \cdot 10}{0.5} \Rightarrow n = \left(\frac{1.645 \cdot 10}{0.5} \right)^2 \Rightarrow \boxed{n = 1082.41}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 1083 botes de champú.

B.1. (2 puntos) Una pastelería tiene 220 buñuelos de chocolate, nata y crema. Hay el doble de buñuelos de nata que de crema. Además, el doble de la cantidad de los buñuelos de crema más el triple de los buñuelos de chocolate es igual al doble de la cantidad de los buñuelos de nata. Calcule la cantidad de buñuelos que hay de cada tipo.

Llamamos “x” al número de buñuelos de chocolate, “y” al número de buñuelos de nata y “z” al número de buñuelos de crema.

“Una pastelería tiene 220 buñuelos de chocolate, nata y crema” $\rightarrow x + y + z = 220$

“Hay el doble de buñuelos de nata que de crema” $\rightarrow y = 2z$

“El doble de la cantidad de los buñuelos de crema más el triple de los buñuelos de chocolate es igual al doble de la cantidad de los buñuelos de nata” $\rightarrow 2z + 3x = 2y$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 220 \\ y = 2z \\ 2z + 3x = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2z + z = 220 \\ 2z + 3x = 2(2z) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3z = 220 \\ 2z + 3x = 4z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 220 - 3z \\ 3x - 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(220 - 3z) - 2z = 0 \Rightarrow 660 - 9z - 2z = 0 \Rightarrow -11z = -660 \Rightarrow \boxed{z = \frac{-660}{-11} = 60} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 220 - 3 \cdot 60 = 40} \\ \boxed{y = 2 \cdot 60 = 120} \end{array} \right.$$

Hay 40 buñuelos de chocolate, 120 de nata y 60 de crema.

B.2. (2 puntos) Se desea producir pintura verde en dos tonalidades, VERDE1 y VERDE2, mezclando pintura azul y amarilla en distintas proporciones. Un litro de pintura VERDE1 necesita 0,3 litros de azul y 0,7 litros de amarillo, mientras que un litro de pintura VERDE2 necesita 0,5 litros de azul y 0,5 litros de amarillo. Actualmente se dispone de 20 litros de azul y 28 litros de amarillo. El beneficio por litro de la pintura VERDE1 es de 1 euro, y por litro de pintura VERDE2 es de 1,2 euros. No se pueden producir más de 30 litros de pintura VERDE1. ¿Cuántos litros de pintura VERDE1 y VERDE2 debe producir para maximizar sus beneficios? ¿Cuál será el beneficio obtenido?

Llamemos x = “litros de pintura VERDE1”, y = “litros de pintura VERDE2”.

Reunimos los datos en una tabla.

	Litros de azul	Litros de amarillo	Beneficio
Nº litros de VERDE1 (x)	$0.3x$	$0.7x$	x
Nº litros de VERDE2 (y)	$0.5y$	$0.5y$	$1.2y$
	$0.3x + 0.5y$	$0.7x + 0.5y$	$x + 1.2y$

Deseamos maximizar el beneficio que viene expresado como $B(x, y) = x + 1.2y$.

Las restricciones del problema son:

“Las cantidades deben ser positivas” $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

“Dispone para la mezcla de 20 litros de azul” $\rightarrow 0.3x + 0.5y \leq 20$

“Dispone para la mezcla de 28 litros de amarillo” $\rightarrow 0.7x + 0.5y \leq 28$

“No se pueden producir más de 30 litros de pintura VERDE1” $\rightarrow x \leq 30$

Reuniendo todas las restricciones tenemos el sistema de inecuaciones siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} 0.3x + 0.5y \leq 20 \\ 0.7x + 0.5y \leq 28 \\ x \leq 30 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 5y \leq 200 \\ 7x + 5y \leq 280 \\ x \leq 30 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$3x + 5y = 200$$

x	$y = \frac{200-3x}{5}$
0	40
40	8

$$7x + 5y = 280$$

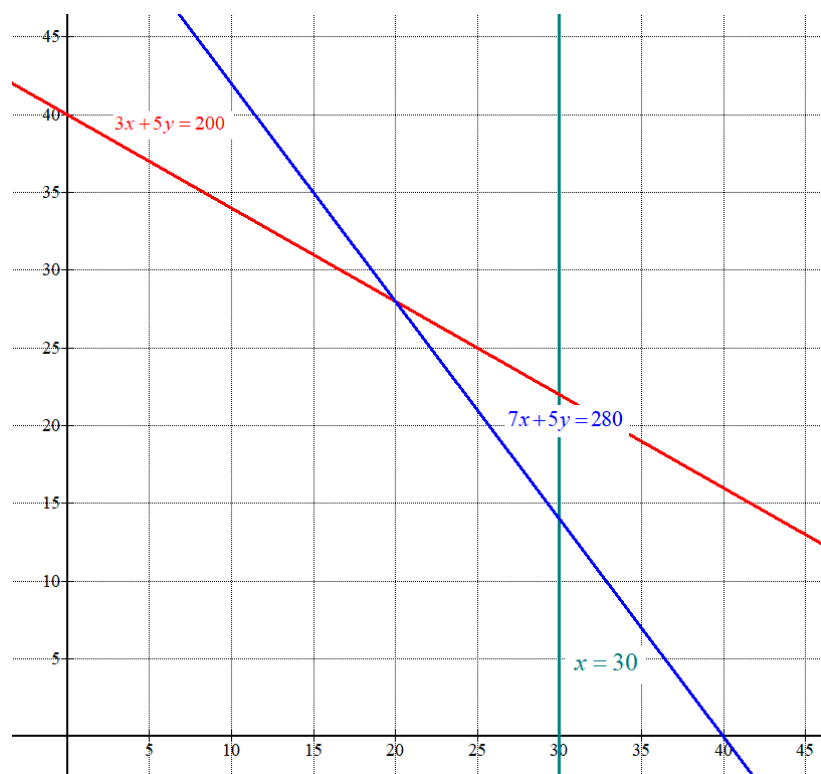
x	$y = \frac{280-7x}{5}$
0	56
40	0

$$x = 30$$

Recta
vertical

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante



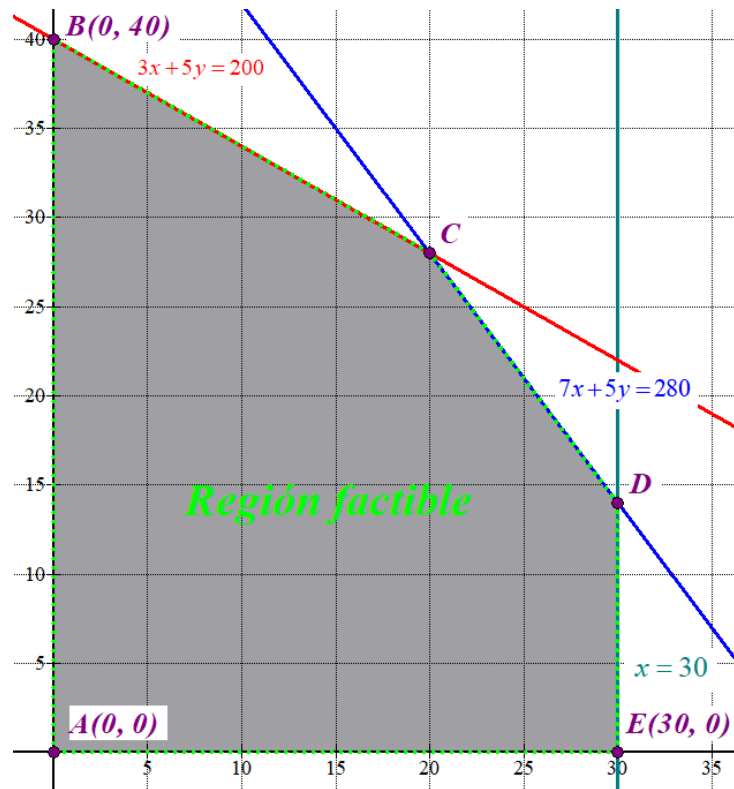
Como las restricciones son
$$\left. \begin{array}{l} 3x + 5y \leq 200 \\ 7x + 5y \leq 280 \\ x \leq 30 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$
 la región está en el primer cuadrante por debajo de la

recta azul y roja, a la izquierda de la recta vertical verde $x = 30$.

Lo comprobamos probando si el punto $P(10, 10)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 30 + 50 \leq 200 \\ 70 + 50 \leq 280 \\ 10 \leq 30 \\ 10 \geq 0; \quad 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡¡Se cumplen todas!!}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Nos falta por determinar las coordenadas de los puntos C y D. Resolvemos el sistema de ecuaciones correspondiente.

$$C \rightarrow \begin{cases} 3x + 5y = 200 \\ 7x + 5y = 280 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 5y = 200 \\ -7x - 5y = -280 \end{cases} \\ -4x = -80 \Rightarrow x = -80 / -4 = 20 \Rightarrow 60 + 5y = 200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5y = 140 \Rightarrow y = \frac{140}{5} = 28 \Rightarrow \boxed{C(20, 28)}$$

$$D \rightarrow \begin{cases} x = 30 \\ 7x + 5y = 280 \end{cases} \Rightarrow 210 + 5y = 280 \Rightarrow 5y = 70 \Rightarrow y = \frac{70}{5} = 14 \Rightarrow \boxed{D(30, 14)}$$

Valoramos la función beneficio $B(x, y) = x + 1.2y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 40) \rightarrow B(0, 40) = 0 + 1.2 \cdot 40 = 48$$

$$C(20, 28) \rightarrow B(20, 28) = 20 + 1.2 \cdot 28 = 53.6 \quad \text{¡Máximo!}$$

$$D(30, 14) \rightarrow B(30, 14) = 30 + 1.2 \cdot 14 = 46.8$$

$$E(30, 0) \rightarrow B(30, 0) = 30 + 0 = 30$$

El beneficio máximo es de 53.6 € y se consigue en el vértice C(20, 28), que significa fabricar 20 litros de pintura VERDE1 y 28 de pintura VERDE2.

B.3. (2 puntos) Se consideran las siguientes funciones reales de variable real:

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x, \quad g(x) = 4x$$

- a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.
 b) Calcule el área de la región acotada limitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el primer cuadrante del plano cartesiano.

- a) Usamos la función derivada para buscar sus puntos críticos.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = -3x^2 + 4x + 4 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -3x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-3)(4)}}{2(-3)} =$$

$$= \frac{-4 \pm 8}{-6} = \begin{cases} \frac{-4+8}{-6} = \frac{-2}{3} = x \\ \frac{-4-8}{-6} = 2 = x \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

En el intervalo $(-\infty, -2/3)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = -3(-1)^2 + 4(-1) + 4 = -3 < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -2/3).$$

En el intervalo $(-2/3, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = -3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 4 = 5 > 0$. La función crece en $(-2/3, 2)$.

En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = -3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 4 = -11 < 0$. La función decrece en $(2, +\infty)$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty, -2/3) \cup (2, +\infty)$ y crece en $(-2/3, 2)$.

- b) Buscamos los puntos de corte de ambas funciones.

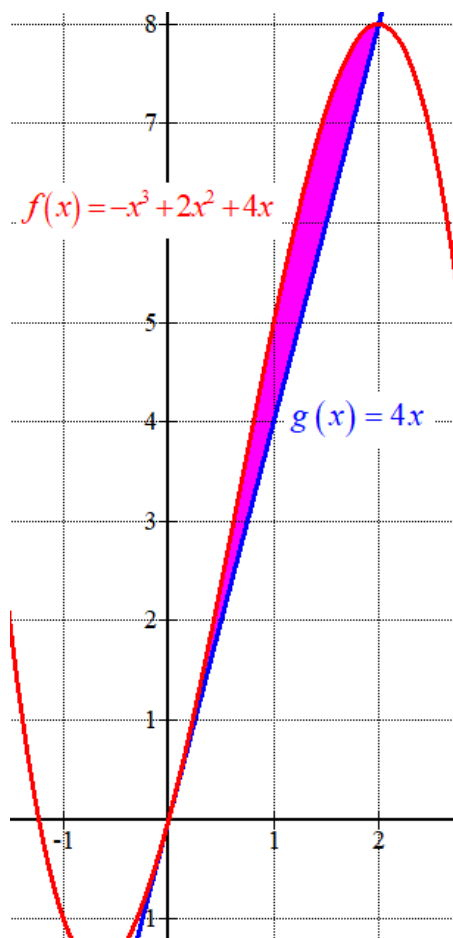
$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x^3 + 2x^2 + 4x = 4x \Rightarrow -x^3 + 2x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(-x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x+2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

El área del recinto es el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 2 de la diferencia de las dos funciones.

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) - g(x) dx &= \int_0^2 -x^3 + 2x^2 + 4x - 4x dx = \int_0^2 -x^3 + 2x^2 dx = \left[-\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \\ &= \left[-\frac{2^4}{4} + 2\frac{2^3}{3} \right] - \left[-\frac{0^4}{4} + 2\frac{0^3}{3} \right] = -4 + \frac{16}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{4}{3} \simeq 1.33 \text{ u}^2}$$

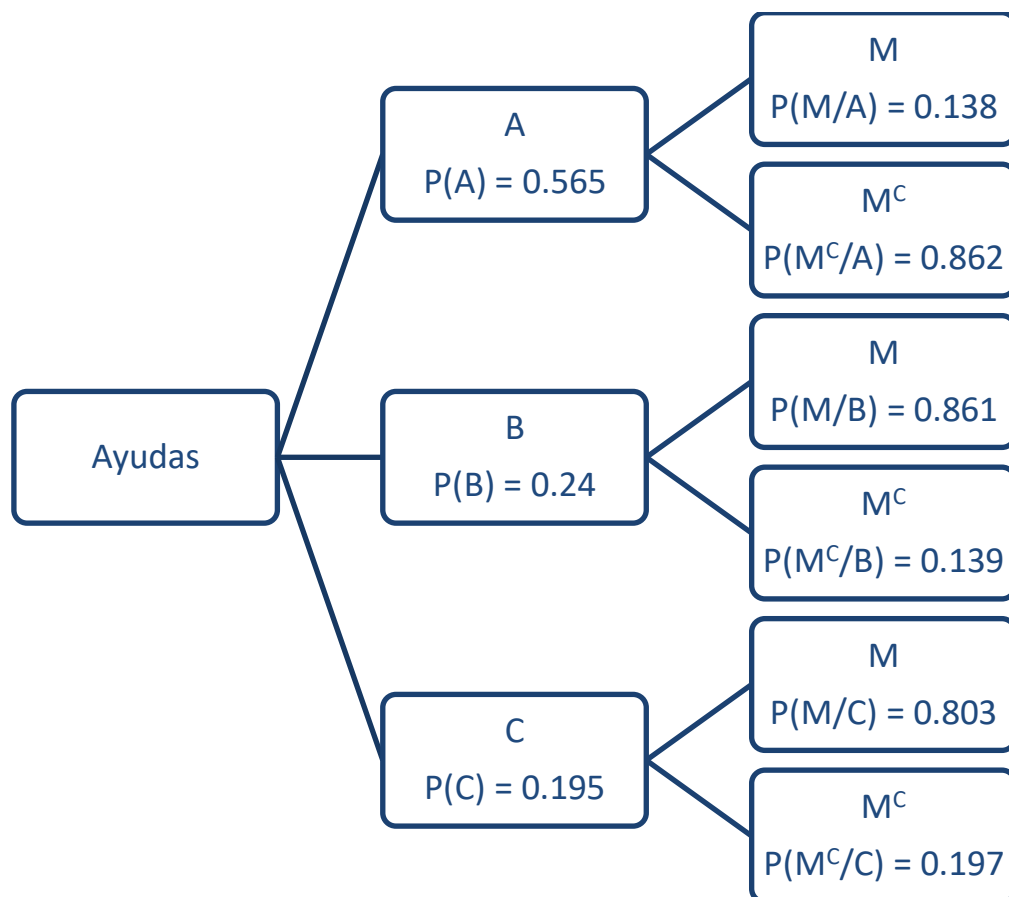


B.4. (2 puntos) El Ministerio de Educación y Formación Profesional convoca regularmente unas ayudas al estudio. En el curso 2019-2020 las ayudas destinadas a las Enseñanzas Obligatorias representaron el 56,5% del total, el 24% correspondieron a Enseñanzas Universitarias, mientras que el 19,5% restante fueron para Enseñanzas Postobligatorias No Universitarias. Las ayudas concedidas son financiadas o bien por el ministerio o bien por la Comunidad Autónoma a la que pertenece el estudiante. Concretamente, en el curso 2019-2020, las ayudas financiadas por el ministerio representaron el 13,8% del total de ayudas de Enseñanzas Obligatorias, el 86,1% de las Universitarias y el 80,3% de las Postobligatorias No Universitarias. Eligiendo una ayuda al estudio al azar de las anteriormente descritas, calcule la probabilidad de que:

a) Sea financiada por el ministerio.

b) La ayuda sea de Enseñanza Obligatoria, sabiendo que ha sido financiada por el ministerio.

Llamamos A al suceso “Ayuda destinada a las Enseñanzas Obligatorias”, B al suceso “Ayuda destinada a las Enseñanzas Universitarias” y C al suceso “Ayuda destinada a Enseñanzas Postobligatorias”. Y llamamos M al suceso “Ayuda financiada por el ministerio”. Realizamos un diagrama de árbol descriptivo de la situación.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(M) &= P(A)P(M/A) + P(B)P(M/B) + P(C)P(M/C) = \\
 &= 0.565 \cdot 0.138 + 0.24 \cdot 0.861 + 0.195 \cdot 0.803 = \boxed{0.4412}
 \end{aligned}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{P(A)P(M/A)}{P(M)} = \frac{0.565 \cdot 0.138}{0.565 \cdot 0.138 + 0.24 \cdot 0.861 + 0.195 \cdot 0.803} \approx \boxed{0.1767}$$

B.5. (2 puntos) El 30% de los individuos de una población tienen una titulación universitaria. Se escoge una muestra al azar de 120 individuos.

a) ¿Cuál es la distribución aproximada que sigue la proporción de individuos con titulación universitaria de la muestra?

b) Halle la probabilidad de que más del 35% de los individuos de la muestra sean titulados universitarios.

a) El tamaño de la muestra es $n = 120$ y la probabilidad de éxito es $p = 0.3$.

Como $np = 120 \cdot 0.3 = 36 > 5$ y $nq = 120 \cdot 0.7 = 84 > 5$ la proporción se puede aproximar por una

$$\text{normal } N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = N\left(0.3, \sqrt{\frac{0.3 \cdot 0.7}{120}}\right) = N(0.3, 0.0418)$$

b)

$$P(p > 0.35) = P(Y > 0.35) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{0.35 - 0.30}{0.0418}\right) =$$

$$= P(Z > 1.2) = 1 - P(Z < 1.2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8849 = \boxed{0.1151}$$