Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2022-2023

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Elija tres de los seis ejercicios siguientes

EJERCICIO 1:

i) Clasifique el siguiente sistema en función del número de soluciones y resuélvalo utilizando el método de Gauss. (7 puntos)

$$\begin{cases} x+y+3z=1 \\ 4x+3y+5z=5 \\ 2x+y-z=3 \end{cases}$$

ii) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ k & -6 \end{pmatrix}$. Determine el valor que debe tomar el parámetro k para que el producto de ambas matrices conmute. (3 puntos)

EJERCICIO 2:

Una empresa utiliza dos máquinas distintas (M1 y M2) para fabricar tres tipos de láminas de acero (rayada, lisa y doblemente rayada). Una hora de trabajo de la máquina M1 fabrica 10 metros de lámina rayada, 50 metros de lámina lisa y 10 metros de lámina doblemente rayada. Una hora de trabajo de la máquina M2 fabrica 40 metros de lámina rayada, 20 metros de lámina lisa y 10 metros de lámina doblemente rayada. Cada hora de trabajo de las máquinas M1 y M2 tiene un coste de 800 euros y 100 euros, respectivamente. Sabiendo que la empresa tiene una demanda diaria de al menos 240 metros de lámina rayada, 300 metros de lámina lisa y 120 metros de lámina doblemente rayada, calcule cuántas horas deberá trabajar al día cada máquina para minimizar el coste de fabricación.

i) Plantee el problema. (4 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si la demanda diaria de la lámina de acero lisa aumenta en 100 metros más respecto de la demanda actual. (2 puntos)

EJERCICIO 3:

Considere las funciones $f(x)=x+3$ y $g(x)=-x^2+4x+3$.

i) Calcule la derivada de la función $g(x)$ en el punto $x=1$, aplicando la definición de derivada. (3 puntos)

ii) Dibuje el recinto del plano comprendido entre las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Calcule el área de dicho recinto. (7 puntos)

EJERCICIO 4:

El beneficio (en miles de euros) de una pequeña empresa de Navarra varía según la función:

$$B(t)=\begin{cases} -t^2+8t+4 & si \;\; 0\le t\le 7 \\ 2t-3 & si \;\; 7<t\le 10 \end{cases},$$ siendo t el tiempo transcurrido en meses.

i) ¿Cuál es el beneficio inicial de la empresa? (1 punto)
ii) Estudie la continuidad de $B(t)$, clasificando en su caso los puntos de discontinuidad. (3 puntos)
iii) ¿En qué mes se alcanza el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio máximo? (3 puntos)
iv) Represente la gráfica de la evolución del beneficio de esta empresa. (3 puntos)

EJERCICIO 5:

i) En un concurso se dispone de dos urnas. En la primera urna hay 15 bolas, 6 de ellas premiadas con un viaje, 5 bolas con un premio de 1.000 euros y 4 bolas sin premio. La segunda urna tiene 10 bolas (3 con viaje, 4 con 1.000 euros y 3 sin premio). Un concursante tiene que seleccionar al azar una bola de la primera urna e introducirla en la segunda urna. Tras esto, el concursante tiene que elegir una bola al azar de la segunda urna. Calcule la probabilidad de que la bola seleccionada no tenga premio. (5 puntos)

ii) En una universidad se realizó una encuesta a los estudiantes acerca de sus hábitos de alimentación y ejercicio físico. El 40% realizaban 5 comidas al día y el 70% de los estudiantes hacían ejercicio físico regularmente. El 80% de los estudiantes que realizaban 5 comidas al día hacían ejercicio físico regularmente.

Se selecciona un estudiante al azar. Calcule la probabilidad de que ni realice 5 comidas al día ni haga ejercicio físico regularmente. (3 puntos)

Compruebe si los sucesos “comer 5 comidas al día” y “hacer ejercicio físico regularmente” son o no sucesos independientes. (2 puntos)

EJERCICIO 6:

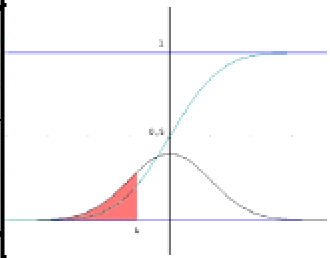
El salario mensual (en euros) de los jóvenes de un país A sigue una distribución normal con varianza 40.000 euros^2, mientras que el salario mensual de los jóvenes de un país B sigue una distribución normal con desviación típica 300 euros. Se tomó una muestra de 169 jóvenes del país A y se obtuvo un salario mensual medio de 1.200 euros. A partir de una muestra de 49 jóvenes del país B, se calculó un salario mensual medio de 1.600 euros.

i) Calcule un intervalo de confianza para el salario mensual medio de los jóvenes del país A y otro para el salario mensual medio de los jóvenes del país B, ambos con un nivel de confianza del 88%. Interprete las soluciones en el contexto del problema. (5 puntos)

ii) Con los datos de la muestra del país B se ha calculado otro intervalo de confianza para el salario mensual medio: [1.525, 1.675]. Determine el nivel de confianza de este intervalo, justificando su respuesta. (5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

$$P(Z<k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{k} e^{-t^2/2}\,dt$$



k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

SOLUCIONES

EJERCICIO 1:

i) Clasifique el siguiente sistema en función del número de soluciones y resuélvalo utilizando el método de Gauss. (7 puntos)

$$\begin{cases} x+y+3z=1 \\ 4x+3y+5z=5 \\ 2x+y-z=3 \end{cases}$$

ii) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ k & -6 \end{pmatrix}$. Determine el valor que debe tomar el parámetro k para que el producto de ambas matrices conmute. (3 puntos)

i)

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Estudiamos los rangos de A y A/B utilizando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{llll} \text{Fila 2}^{\text{a}} & - & 4 \cdot \text{Fila 1}^{\text{a}} & \\ 4 & 3 & 5 & 5 \\ -4 & -4 & -12 & -4 \\ \hline 0 & -1 & -7 & 1 \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^{\text{a}} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{llll} \text{Fila 3}^{\text{a}} & - & 2 \cdot \text{Fila 1}^{\text{a}} & \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & -6 & -2 \\ \hline 0 & -1 & -7 & 1 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{llll} \text{Fila 3}^{\text{a}} & - & \text{Fila 2}^{\text{a}} & \\ 0 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}_{A} \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}}^{A/B} \right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y+3z=1 \\ -y-7z=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y+3z=1 \\ -1-7z=y \end{matrix}\right\} \Rightarrow x-1-7z+3z=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2+4z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=2+4\lambda \\ y=-1-7\lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}}$$

ii) Comprobamos cuando $A \cdot B = B \cdot A$. Sustituimos los valores de A y B.

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ k & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ k & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -12-k & -6+6 \\ -4+2k & -2-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12-2 & 4-4 \\ 3k-6 & -k-12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -12-k & 0 \\ -4+2k & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 3k-6 & -k-12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -12-k=-14 \\ 0=0 \\ -4+2k=3k-6 \\ -14=-k-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2=k \\ 0=0 \\ 2=k \\ k=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{k=2}$$

El valor buscado es *k* = *2*.

EJERCICIO 2:
Una empresa utiliza dos máquinas distintas (M1 y M2) para fabricar tres tipos de láminas de acero (rayada, lisa y doblemente rayada). Una hora de trabajo de la máquina M1 fabrica 10 metros de lámina rayada, 50 metros de lámina lisa y 10 metros de lámina doblemente rayada. Una hora de trabajo de la máquina M2 fabrica 40 metros de lámina rayada, 20 metros de lámina lisa y 10 metros de lámina doblemente rayada. Cada hora de trabajo de las máquinas M1 y M2 tiene un coste de 800 euros y 100 euros, respectivamente. Sabiendo que la empresa tiene una demanda diaria de al menos 240 metros de lámina rayada, 300 metros de lámina lisa y 120 metros de lámina doblemente rayada, calcule cuántas horas deberá trabajar al día cada máquina para minimizar el coste de fabricación.
i) Plantee el problema. (4 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si la demanda diaria de la lámina de acero lisa aumenta en 100 metros más respecto de la demanda actual. (2 puntos)

i) Es un problema de programación lineal.
Llamamos x = "número de horas de M1". y = "número de horas de M2".

Hacemos una tabla para ordenar toda la información proporcionada.

	Metros de lámina rayada	Metros de lámina lisa	Metros de lámina doblemente rayada	Coste
Nº horas M1 (x)	10x	50x	10x	800x
Nº horas M2 (y)	40y	20y	10y	100y
	$10x+40y$	$50x+20y$	$10x+10y$	$800x+100y$

Se desea minimizar el coste. La función objetivo sería: $C(x,y)=800x+100y$

Las restricciones planteadas nos permiten establecer unas inecuaciones cuyas soluciones constituyen una región del plano que llamamos región factible.

"La empresa tiene una demanda diaria de al menos 240 metros de lámina rayada, 300 metros de lámina lisa y 120 metros de lámina doblemente rayada" → $10x+40y\geq 240;\ 50x+20y\geq 300;\ 10x+10y\geq 120$

Además, el número de horas debe ser positivo o cero → $x\geq 0;\quad y\geq 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{r}10x+40y\geq 240\\50x+20y\geq 300\\10x+10y\geq 120\\x\geq 0;\quad y\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+4y\geq 24\\5x+2y\geq 30\\x+y\geq 12\\x\geq 0;\quad y\geq 0\end{array}\right\}$$

ii) Para dibujar la región factible dibujamos primero las rectas que la delimitan.

$x+4y=24$

x	$y=\frac{24-x}{4}$
0	6
8	4
24	0

$5x+2y=30$

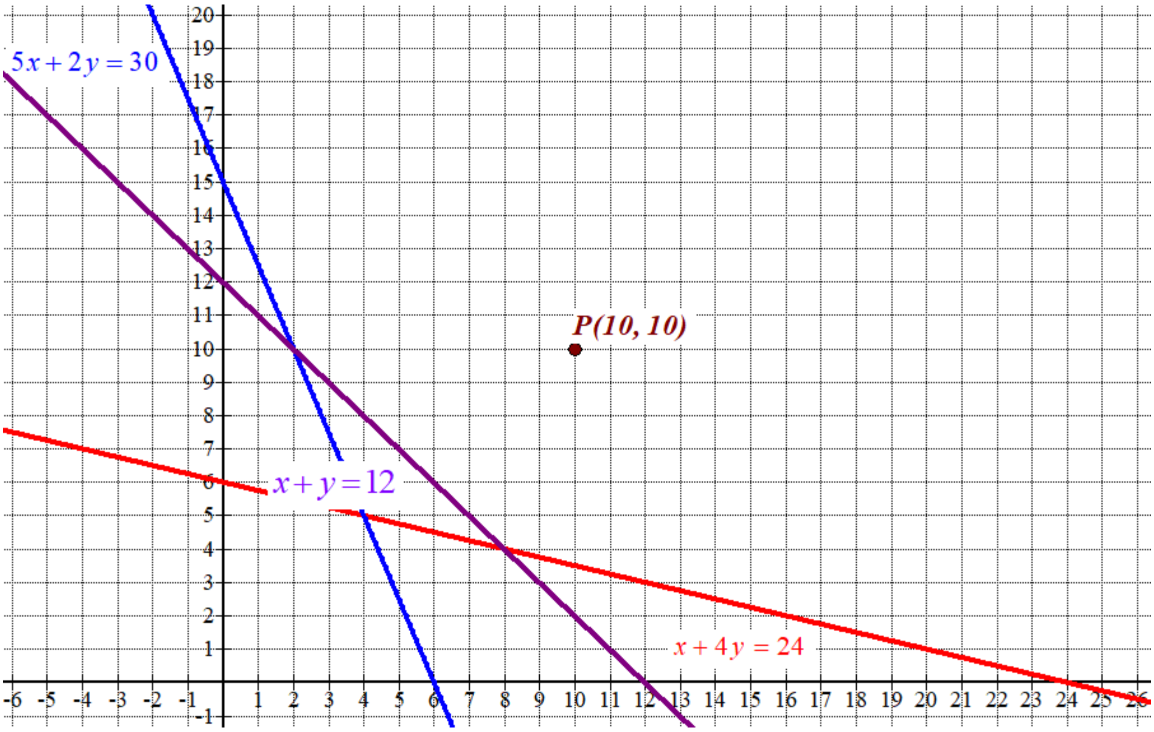
x	$y=\frac{30-5x}{2}$
0	15
2	10
6	0

$x+y=12$

x	$y=12-x$
0	12
2	10
8	4
12	0

$x\geq 0; \quad y\geq 0$

Primer cuadrante

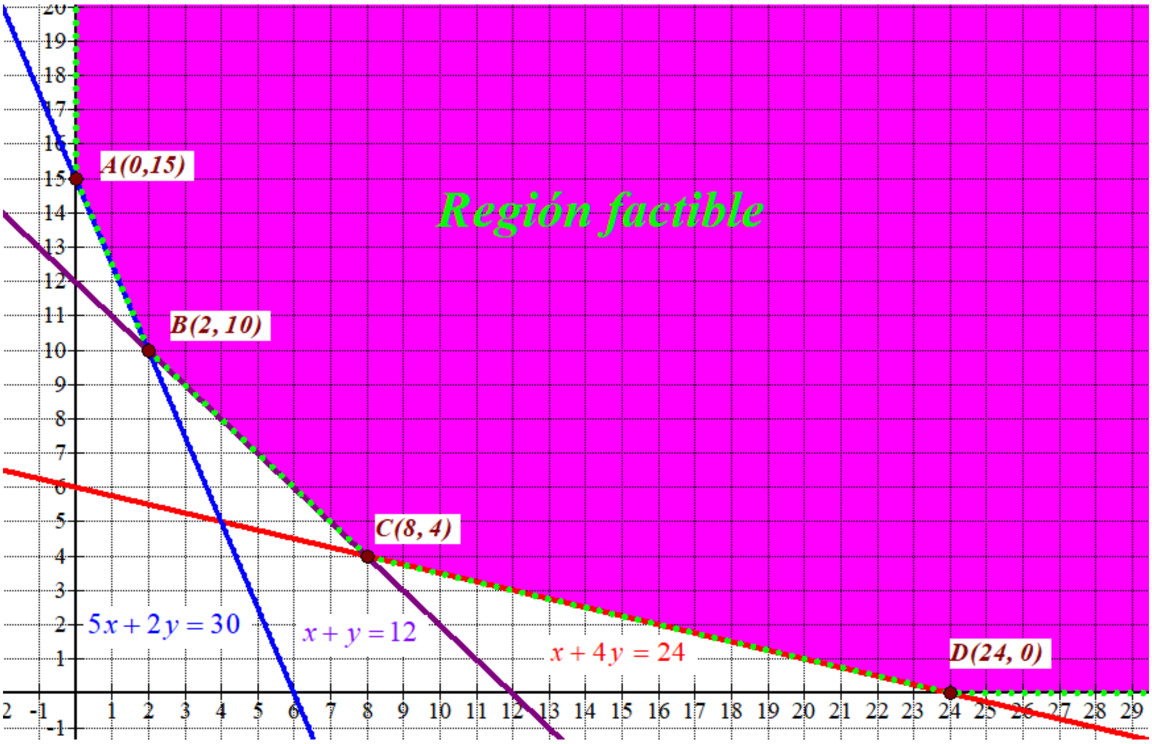


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+4y\geq 24 \\ 5x+2y\geq 30 \\ x+y\geq 12 \\ x\geq 0; \quad y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del plano situada en el primer cuadrante por encima de la recta azul, roja, verde y violeta.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10+40\geq 24 \\ 50+20\geq 30 \\ 10+10\geq 12 \\ 10\geq 0; \quad 10\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



.

Valoramos la función coste $C(x,y)=800x+100y$ en cada uno de los vértices de la región factible buscando el valor mínimo.

A(0,15) → $C(0,15)=0+1500=$1500 ¡Mínimo!

B(2, 10) → $C(2,10)=1600+1000=2600$

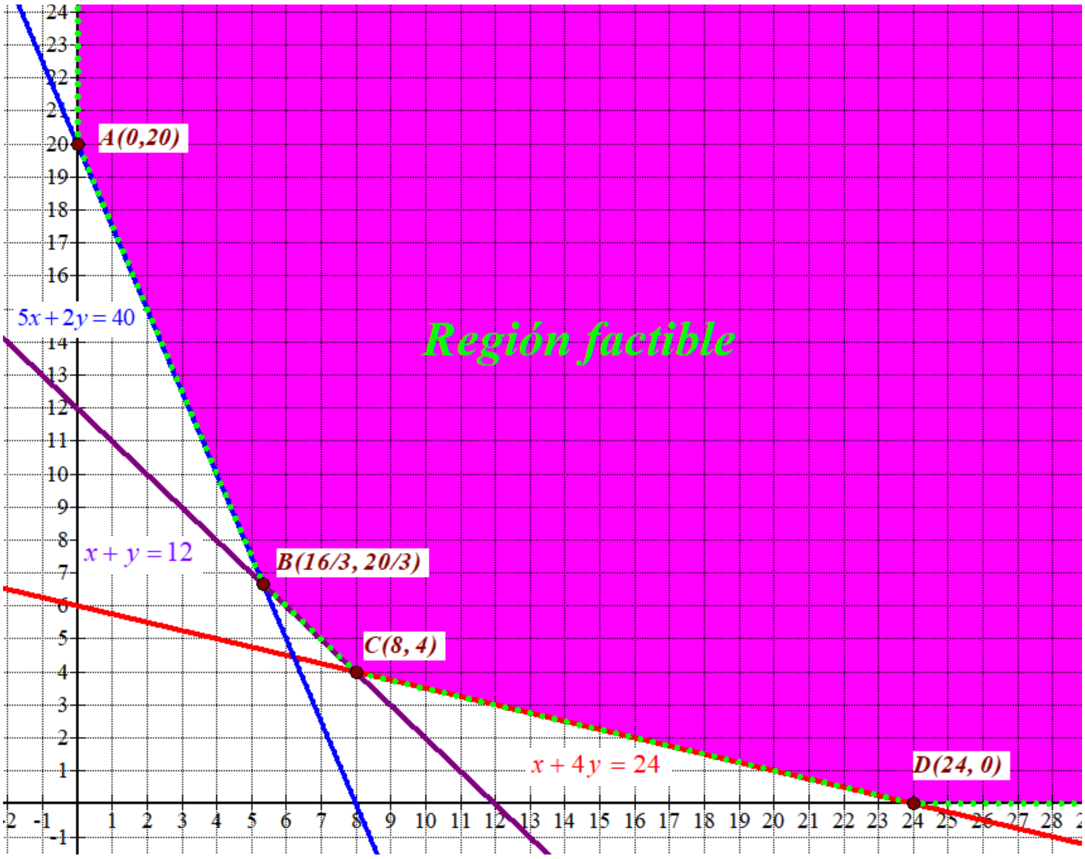
C(8, 4) → $C(8,4)=6400+400=6800$

D(24, 0) → $C(24,0)=15200+0=15200$

El mínimo coste es de 1500 € y se produce en el vértice A(0, 15).
Con 0 horas de la máquina M1 y 15 horas de la máquina M2 cumplimos todas las restricciones con un coste mínimo de 1500 €.

iii) Si se modifica la restricción "La empresa tiene una demanda diaria de al menos 400 metros de lámina lisa" → $50x+20y\geq 400 \to 5x+2y\geq 40$

La nueva región factible sería:



Valoramos la función coste $C(x,y)=800x+100y$ en cada uno de los vértices de la nueva región factible buscando el valor mínimo.

A(0,20) → $C(0,20)=0+2000=2000$ ¡Mínimo!

B(16/3, 20/3) → $C(16/3,20/3)=\frac{16}{3}800+\frac{20}{3}100=\frac{14800}{3}\simeq 4933.33$

C(8, 4) → $C(8,4)=6400+400=6800$

D(24, 0) → $C(24,0)=15200+0=15200$

Con la nueva situación la solución que minimiza el coste es el punto A(0, 20) .
El mínimo coste es de 2000 € y se produce con 0 horas de la máquina M1 y 20 horas de la máquina M2.

EJERCICIO 3:
Considere las funciones $f(x)=x+3$ y $g(x)=-x^2+4x+3$.
i) Calcule la derivada de la función $g(x)$ en el punto $x=1$, aplicando la definición de derivada. (3 puntos)
ii) Dibuje el recinto del plano comprendido entre las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Calcule el área de dicho recinto. (7 puntos)

i) $g'(x)=-2x+4 \Rightarrow g'(1)=-2+4=2$.

Aplicando la definición de derivada tenemos que:

$$g'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-(1+h)^2+4(1+h)+3-\left(-1^2+4+3\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-\left(1+h^2+2h\right)+4+4h+3-6}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1-h^2-2h+4+4h+3-6}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h^2+2h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(-h+2)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}-h+2=\boxed{2}$$

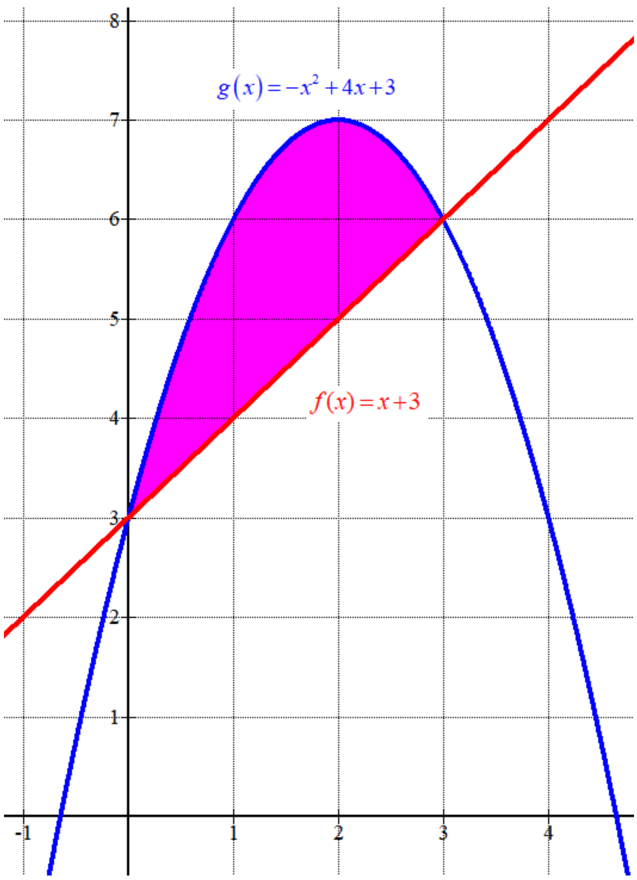
ii) Hallamos los puntos de corte de las gráficas.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow x+3=-x^2+4x+3\Rightarrow x^2-3x=0\Rightarrow x(x-3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=3\end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores para dibujar recta y parábola entre 0 y 3.

x	$f(x)=x+3$
0	3
3	6

x	$g(x)=-x^2+4x+3$
0	3
1	6
2	7
3	6



Calculamos el área del recinto como la integral definida entre 0 y 3 de la diferencia entre la parábola y la recta.

$$Área = \int_0^3 -x^2+4x+3-(x+3)\,dx = \int_0^3 -x^2+4x+3-x-3dx = \int_0^3 -x^2+3xdx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \left[-\frac{3^3}{3}+3\frac{3^2}{2}\right]-\left[-\frac{0^3}{3}+3\frac{0^2}{2}\right] = -9+\frac{27}{2} = \boxed{4.5\ u^2}$$

EJERCICIO 4:
El beneficio (en miles de euros) de una pequeña empresa de Navarra varía según la función:
$B(t)=\begin{cases} -t^2+8t+4 & si \;\; 0\leq t\leq 7 \\ 2t-3 & si \;\; 7<t\leq 10 \end{cases}$, siendo t el tiempo transcurrido en meses.
i) ¿Cuál es el beneficio inicial de la empresa? (1 punto)
ii) Estudie la continuidad de $B(t)$, clasificando en su caso los puntos de discontinuidad. (3 puntos)
iii) ¿En qué mes se alcanza el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio máximo? (3 puntos)
iv) Represente la gráfica de la evolución del beneficio de esta empresa. (3 puntos)

i) Nos piden el valor de B(0).

$$B(0)=-0^2+8\cdot 0+4=4$$

El beneficio inicial de la empresa es de 4000 €.

ii) El único punto donde puede haber discontinuidad es en el cambio de definición, en $t=7$, pues los dos trozos son funciones polinómicas que son continuas.

$$\left.\begin{array}{l} B(7)=-7^2+8\cdot 7+4=11 \\ \lim\limits_{t\to 7^-} B(t)=\lim\limits_{t\to 7^-} -t^2+8t+4=11 \\ \lim\limits_{t\to 7^+} B(t)=\lim\limits_{t\to 7^+} 2t-3=14-3=11 \end{array}\right\} \Rightarrow B(7)=\lim_{t\to 7^-} B(t)=\lim_{t\to 7^+} B(t)=11$$

La función es continua en su dominio [0, 10].
No hay puntos de discontinuidad.

iii) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$B'(t)=\begin{cases} -2t+8 & si \;\; 0\leq t<7 \\ 2 & si \;\; 7<t\leq 10 \end{cases}$$

$$B'(t)=0\Rightarrow \begin{cases} -2t+8=0\rightarrow 2t=8\rightarrow t=4\in(0,7) \\ 2=0 \quad \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

La función presenta un punto crítico, en $t=4$.
Valoramos la función en este valor y en los extremos de los intervalos de definición.

$$\left.\begin{array}{l} B(0)=4 \\ B(4)=-4^2+8\cdot 4+4=20 \text{ ¡Máximo!} \\ B(7)=11 \\ B(10)=20-3=17 \end{array}\right\}$$

En $t=4$ hay un valor máximo absoluto de la función beneficio.

En el cuarto mes se obtiene un beneficio máximo de 20000 €.

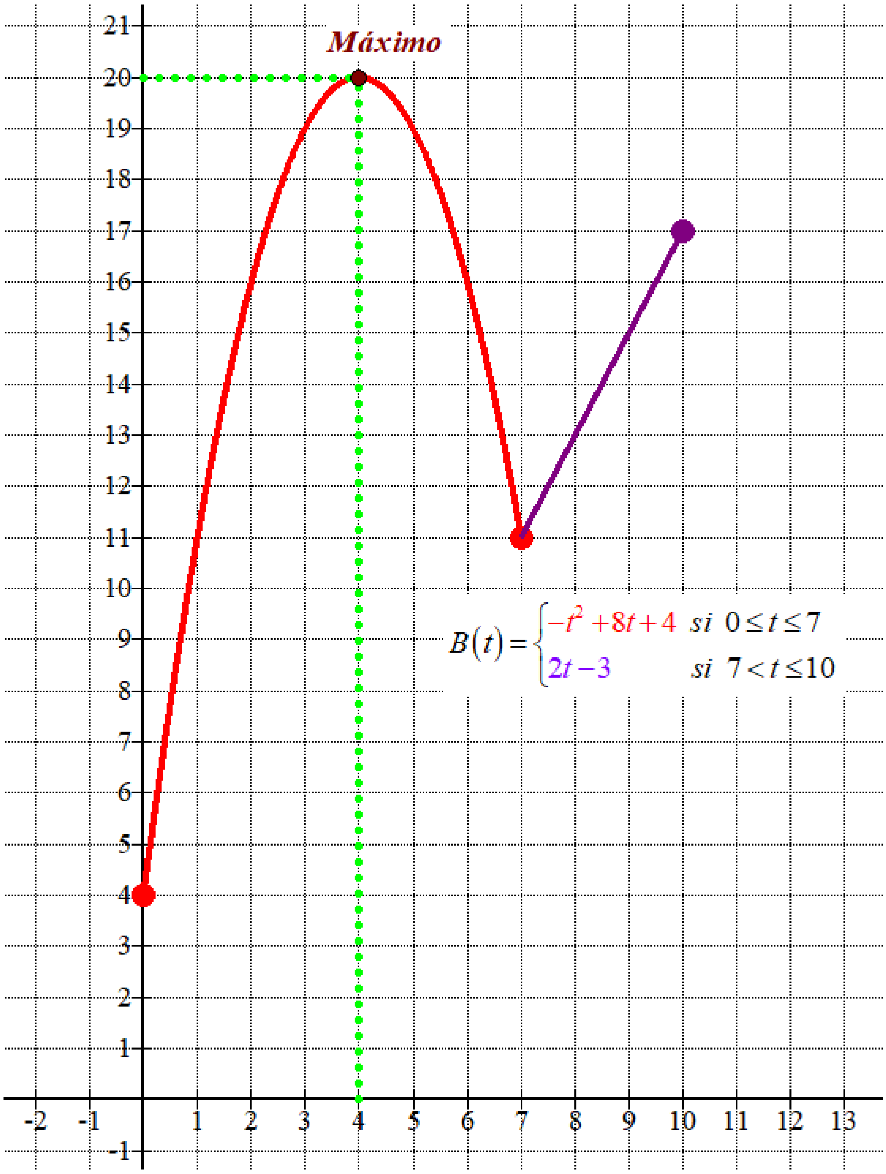
iv) Para representar la gráfica de la función hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función beneficio.

$0 \leq t \leq 7$

t	$B(t) = -t^2 + 8t + 4$
0	4
1	11
3	19
4	20
5	19
7	11

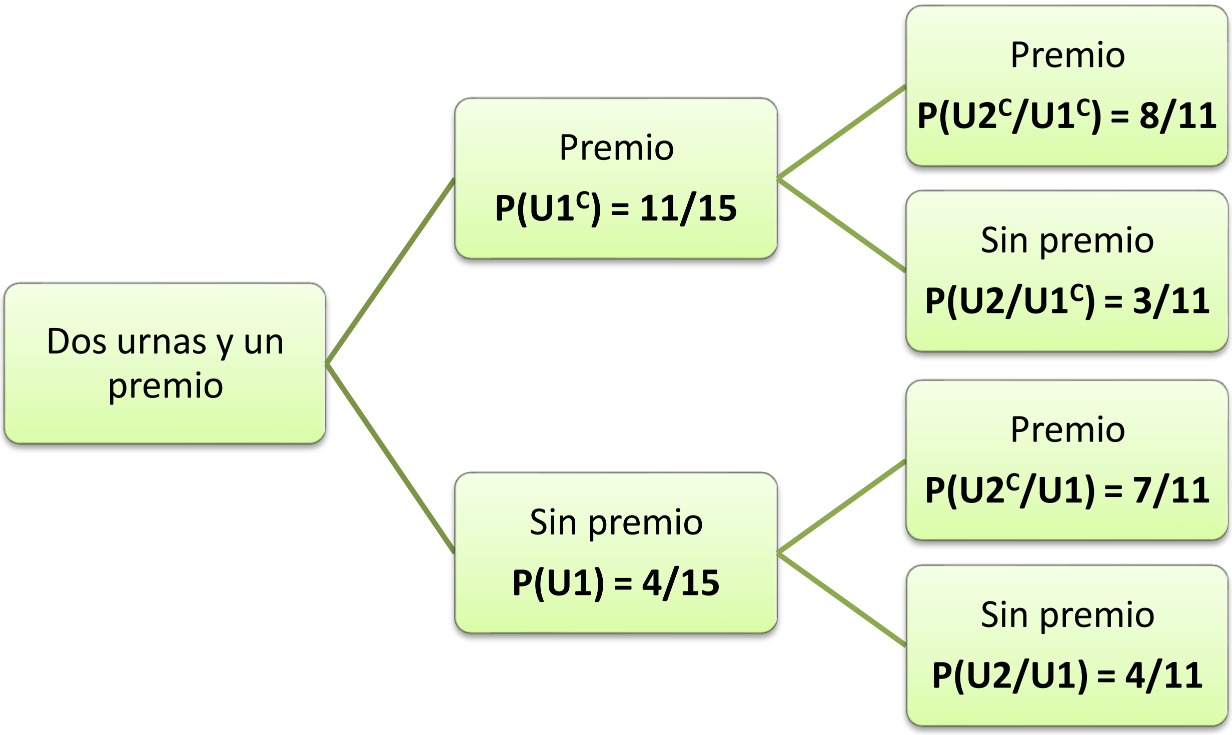
$7 < t \leq 10$

t	$B(t) = 2t - 3$
8	13
10	17



EJERCICIO 5:
i) En un concurso se dispone de dos urnas. En la primera urna hay 15 bolas, 6 de ellas premiadas con un viaje, 5 bolas con un premio de 1.000 euros y 4 bolas sin premio. La segunda urna tiene 10 bolas (3 con viaje, 4 con 1.000 euros y 3 sin premio). Un concursante tiene que seleccionar al azar una bola de la primera urna e introducirla en la segunda urna. Tras esto, el concursante tiene que elegir una bola al azar de la segunda urna. Calcule la probabilidad de que la bola seleccionada no tenga premio. (5 puntos)
ii) En una universidad se realizó una encuesta a los estudiantes acerca de sus hábitos de alimentación y ejercicio físico. El 40% realizaban 5 comidas al día y el 70% de los estudiantes hacían ejercicio físico regularmente. El 80% de los estudiantes que realizaban 5 comidas al día hacían ejercicio físico regularmente.
Se selecciona un estudiante al azar. Calcule la probabilidad de que ni realice 5 comidas al día ni haga ejercicio físico regularmente. (3 puntos)
Compruebe si los sucesos “comer 5 comidas al día” y “hacer ejercicio físico regularmente” son o no sucesos independientes. (2 puntos)

i) Llamamos U1 = “Elegir bola **no** premiada en urna 1”, U2 = “Elegir bola **no** premiada en urna 2”.
Realizamos un diagrama de árbol.



Nos piden determinar el valor de $P(U2)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(U2) = P(U1^C)P(U2/U1^C) + P(U1)P(U2/U1) =$$

$$= \frac{11}{15}\cdot\frac{3}{11} + \frac{4}{15}\cdot\frac{4}{11} = \boxed{\frac{49}{165} \simeq 0.297}$$

ii) Realizamos una tabla de contingencia para ordenar la información proporcionada y obtener el resto de datos que vienen implícitos en el ejercicio.

	5 comidas al día	No hacen 5 comidas al día	
Hacen ejercicio físico	**0.80 · 40 = 32**		**70**
No hacen ejercicio físico			
	40		**100**

Completamos la tabla.

	5 comidas al día	No hacen 5 comidas al día	
Hacen ejercicio físico	**0.80 · 40 = 32**	**38**	**70**
No hacen ejercicio físico	**8**	**22**	**30**
	40	**60**	**100**

Llamamos A = "Comer 5 comidas al día" y B = "Hacer ejercicio físico regularmente".

$$P(\text{ni realice 5 comidas al día ni haga ejercicio físico regularmente}) =$$

$$= P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \boxed{\frac{22}{100} = 0.22}$$

Comprobamos si son independientes los sucesos A y B. Para ello comprobamos si se cumple que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cap B) = \dfrac{32}{100} = 0.32 \\ P(A)P(B) = \dfrac{40}{100} \cdot \dfrac{70}{100} = 0.28 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

Al no cumplirse la igualdad podemos afirmar que los sucesos no son independientes.

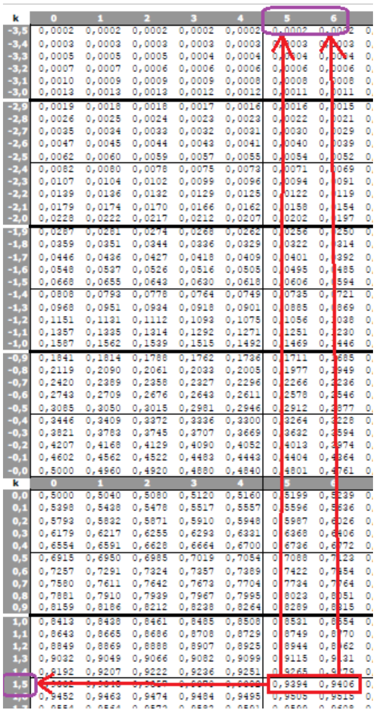
EJERCICIO 6:
El salario mensual (en euros) de los jóvenes de un país A sigue una distribución normal con varianza 40.000 euros^2, mientras que el salario mensual de los jóvenes de un país B sigue una distribución normal con desviación típica 300 euros. Se tomó una muestra de 169 jóvenes del país A y se obtuvo un salario mensual medio de 1.200 euros. A partir de una muestra de 49 jóvenes del país B, se calculó un salario mensual medio de 1.600 euros.
i) Calcule un intervalo de confianza para el salario mensual medio de los jóvenes del país A y otro para el salario mensual medio de los jóvenes del país B, ambos con un nivel de confianza del 88%. Interprete las soluciones en el contexto del problema. (5 puntos)
ii) Con los datos de la muestra del país B se ha calculado otro intervalo de confianza para el salario mensual medio: [1.525, 1.675]. Determine el nivel de confianza de este intervalo, justificando su respuesta. (5 puntos)
(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

X_A = El salario mensual (en euros) de un joven de un país A.
Como la varianza es 40000 la desviación típica será $\sigma_A = \sqrt{40000} = 200\, euros$.
$X_A = N(\mu_A, 200)$

X_B = El salario mensual (en euros) de un joven de un país B.
$X_B = N(\mu_B, 300)$

i) En el país A el tamaño de la muestra es $n = 169$ y la media muestral es $\overline{x_A} = 1200$ €
Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza el 88 %

$$1-\alpha = 0.88 \rightarrow \alpha = 0,12 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,06 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0,94 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco k en la} \\ \text{tabla de la N(0,1)} \\ P\left(Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0.94 \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,555$$



Lo aplicamos en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,555 \cdot \frac{200}{\sqrt{169}} \simeq 23.92$$

El intervalo de confianza para la media poblacional en el país A es:

$$\left(\overline{x_A} - Error, \overline{x_A} + Error\right) = \left(1200 - 23.92, 1200 + 23.92\right) = \left(1176.08,\ 1223.92\right)$$

En el país B el tamaño de la muestra es *n = 49*, la media muestral es $\overline{x_B} = 1600\,€$ y $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.555$.

Lo aplicamos en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,555 \cdot \frac{300}{\sqrt{49}} \simeq 66.64$$

El intervalo de confianza para la media poblacional en el país B es:

$$\left(\overline{x_B} - Error, \overline{x_B} + Error\right) = \left(1600 - 66.64, 1600 + 66.64\right) = \left(1533.36,\ 1666.64\right)$$

El error en el intervalo de confianza en el país A es menor que en el B, a pesar de tener el país B una dispersión mayor, pero la muestra es mucho más grande en A.

ii) El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza [1.525, 1.675].

$$Error = \frac{1675 - 1525}{2} = 75\,€$$

Aplicamos la fórmula del error y despejamos "$z_{\alpha/2}$":

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 75 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{300}{\sqrt{49}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{75 \cdot 7}{300} = 1.75$$

Buscamos el nivel de confianza correspondiente a este valor $z_{\alpha/2} = 1.75$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.75 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la} \\ \text{tabla de la N(0,1)} \\ P\left(Z < 1.75\right) \end{array} \right\} \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.96 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.04 \rightarrow \alpha = 0.08 \rightarrow 1 - \alpha = 0.92$$

El nivel de confianza es del 92 %.