



UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOA

2022ko OHIKOA

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

ORDINARIA 2023

MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II

Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques. De estos ocho problemas tienes que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de transmitir datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes,
- derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1. [hasta 2.5 puntos]

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

- a) [1 punto] Razona qué dimensión deben tener las matrices P y Q para que los productos $(A \cdot P \cdot B^t)$ y $(Q \cdot A \cdot C)$ den como resultado una matriz cuadrada.
- b) [1,5 puntos] Resuelve la ecuación matricial:

$$A \cdot X - 2B \cdot C^t = A^t$$

B.1. [hasta 2.5 puntos]

Una empresa especializada en la fabricación de mobiliario para casas de muñecas produce mesas y sillas que vende a 20 € y 30 €, respectivamente. La empresa quiere saber cuántas unidades de cada artículo debe fabricar diariamente para maximizar **los ingresos**, teniendo en cuenta las siguientes restricciones:

- El número total de unidades producidas de ambos artículos no podrá exceder de 4, por día.
- Cada mesa requiere 2 horas para su fabricación y cada silla 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas.
- El material utilizado en cada mesa cuesta 4 €, y el utilizado en cada silla 2 €. El presupuesto para material es de 12 € diarios.

	PRECIO	MATERIAL	TIEMPO	UNIDADES
MESA	20 €	4 €	2 horas	x
SILLA	30 €	2 €	3 horas	y

- a) [2,1 puntos] Plantea y resuelve el problema de maximización.
- b) [0,4 puntos] Razona si con estas restricciones se puede fabricar diariamente 1 mesa y 1 silla, y si esto le conviene a la empresa.

BLOQUE: ANÁLISIS

A.2. [hasta 2,5 puntos]

- a) [0,8 puntos] La gráfica de la función $g(x) = ax^3 + bx + c$ tiene las siguientes características:
- Pasa por el punto (0,0).
 - Tiene un mínimo relativo en el punto (1,-1).
- Obtén el valor de los parámetros a , b y c .
- b) [1 punto] Determina los máximos relativos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, y realiza su representación gráfica.
- c) [0,7 puntos] Halla el área de la región limitada por el eje de abscisas OX, la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, y las rectas $x=3$ y $x=4$.

B.2. [hasta 2,5 puntos]

Se considera la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 6 & \text{si } x \leq 1 \\ -2x^2 + 8x - 6 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) [1,7 puntos] Estudia la continuidad y derivabilidad de la función.
- b) [0,4 puntos] Determina los extremos relativos de la función.
- c) [0,4 puntos] Representa la gráfica de la función.

BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3. [hasta 2,5 puntos]

De una baraja, Lucía y Carlos han extraído 8 cartas: los cuatro ases y los cuatro reyes. De esas 8 cartas, Lucía le ha dado dos cartas a Carlos y, posteriormente, ha cogido una carta para ella.

Calcula:

- a) [0,4 puntos] La probabilidad de que Carlos tenga dos ases.
- b) [0,6 puntos] La probabilidad de que Carlos tenga un as y un rey.
- c) [0,7 puntos] La probabilidad de que Lucía tenga un as y Carlos no tenga dos reyes.
- d) [0,8 puntos] La probabilidad de que Lucía tenga un rey.

B.3. [hasta 2,5 puntos]

Jimena tiene dos trajes rojos, un traje azul y uno blanco. Además, tiene un par de zapatos de color rojo, otro par de color azul y dos pares blancos.

Si decide aleatoriamente qué ponerse, determina las probabilidades de los siguientes sucesos:

- a) [0,3 puntos] Llevar traje rojo y zapatos blancos.
- b) [0,4 puntos] No ir vestida totalmente de blanco.
- c) [0,4 puntos] Llevar zapatos azules.
- d) [0,5 puntos] Llevar zapatos azules o blancos.
- e) [0,4 puntos] Ir vestida totalmente del mismo color.
- f) [0,5 puntos] Llevar zapatos rojos, sabiendo que no está vestida totalmente del mismo color.

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA**A.4. [hasta 2,5 puntos]**

El número de horas semanales que las y los estudiantes de bachillerato de una determinada ciudad dedican al deporte es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media 8 y varianza 7,29.

Se elige una muestra aleatoria simple de tamaño 36.

- a) *[0,7 puntos]* Indica cuál es la distribución de la media muestral, $\bar{X}$.
- b) *[1 punto]* ¿Cuál es la probabilidad de que el número medio de horas semanales que dedican al deporte esté entre 7,82 y 8,36?
- c) *[0,7 puntos]* En la distribución de la media muestral $\bar{X}$, obtén el intervalo característico para el 99 %.

B.4. [hasta 2,5 puntos]

En una cierta universidad se ha tomado una muestra aleatoria simple de 400 estudiantes, y se ha observado que de ellos 160 han aprobado todas las asignaturas.

- a) *[1,2 puntos]* Estima el porcentaje de estudiantes de esa universidad que aprueban todas las asignaturas, con un nivel de confianza del 97 %.
- b) *[0,5 puntos]* Calcula el error máximo admisible, con el nivel de confianza indicado.
- c) *[0,7 puntos]* A la vista del resultado anterior, se quiere repetir la experiencia para conseguir que el error máximo admisible no sea superior a 0,04, con el mismo nivel de confianza. ¿Cuántos estudiantes, como mínimo, ha de tener la muestra?



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$ -tik z -raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

Soluciones

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1. [hasta 2.5 puntos]

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) [1 punto] Razona qué dimensión deben tener las matrices P y Q para que los productos $(A \cdot P \cdot B^t)$ y $(Q \cdot A \cdot C)$ den como resultado una matriz cuadrada.

b) [1,5 puntos] Resuelve la ecuación matricial:

$$A \cdot X - 2B \cdot C^t = A^t$$

a) Supongamos la matriz P de dimensiones $m \times n$.

$A \cdot P$ es posible si el número de columnas de A (2) es igual al número de filas de P (m) $\rightarrow m = 2$.

$P \cdot B^t$ es posible si el número de columnas de P (n) es igual al número de filas de B^t (3) $\rightarrow n = 3$.

La matriz P debe ser de dimensiones 2×3 .

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} (A \cdot P \cdot B^t) \\ 2 \times [2 \cdot m] \times [n \cdot 3] \times 2 \rightarrow 2 \times 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \end{cases}$$

Supongamos la matriz Q de dimensiones $p \times q$.

$A \cdot C$ es posible pues el número de columnas de A (2) es igual al número de filas de C (2) obteniéndose una matriz 2×3 .

$(Q \cdot A \cdot C)$ es posible si el número de columnas de Q (q) es igual al número de filas de $A \cdot C$ (2) $\rightarrow q = 2$.

Una vez realizado el producto se obtiene una matriz de dimensiones $p \times 3$. Si el resultado debe ser una matriz cuadrada $\rightarrow p = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} (Q \cdot A \cdot C) \\ p \times [q \cdot 2] \times [2 \cdot 2] \times 3 \rightarrow p \times 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} q = 2 \\ p = 3 \end{cases}$$

La matriz Q debe ser de dimensiones 3×2 .

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$A \cdot X - 2B \cdot C^t = A^t \Rightarrow A \cdot X = 2B \cdot C^t + A^t \Rightarrow X = A^{-1} (2B \cdot C^t + A^t)$$

Comprobamos que la matriz A tiene inversa y, si es posible, la calculamos.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe la inversa de A}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación matricial y hallamos la expresión de X.

$$2B \cdot C^t + A^t = 2 \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -3+0+1 & -2-2-1 \\ 9+0-1 & 6+1+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 16 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -13 \\ 18 & 20 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} (2B \cdot C^t + A^t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -13 \\ 18 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10-18 & -26-20 \\ -\frac{15}{2}-\frac{18}{2} & -\frac{39}{2}-\frac{20}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -28 & -46 \\ -33/2 & -59/2 \end{pmatrix}$$

B.1. [hasta 2.5 puntos]

Una empresa especializada en la fabricación de mobiliario para casas de muñecas produce mesas y sillas que vende a 20 € y 30 €, respectivamente. La empresa quiere saber cuántas unidades de cada artículo debe fabricar diariamente para maximizar **los ingresos**, teniendo en cuenta las siguientes restricciones:

- El número total de unidades producidas de ambos artículos no podrá exceder de 4, por día.
- Cada mesa requiere 2 horas para su fabricación y cada silla 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas.
- El material utilizado en cada mesa cuesta 4 €, y el utilizado en cada silla 2 €. El presupuesto para material es de 12 € diarios.

	PRECIO	MATERIAL	TIEMPO	UNIDADES
MESA	20 €	4 €	2 horas	x
SILLA	30 €	2 €	3 horas	y

- a) [2,1 puntos] Plantea y resuelve el problema de maximización.
 b) [0,4 puntos] Razona si con estas restricciones se puede fabricar diariamente 1 mesa y 1 silla, y si esto le conviene a la empresa.

- a) Llamamos “x” al número de mesas fabricadas diariamente e “y” al número de sillas.
 Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Material	Tiempo (horas)	Beneficio
Nº mesas (x)	4x	2x	20x
Nº sillas (y)	2y	3y	30y
TOTAL	$4x + 2y$	$2x + 3y$	$20x + 30y$

La función a maximizar es el beneficio $B(x, y) = 20x + 30y$.

Las restricciones del problema que definen la región factible son:

“El número total de unidades producidas de ambos artículos no podrá exceder de 4, por día” $\rightarrow x + y \leq 4$

“Cada mesa requiere 2 horas para su fabricación y cada silla 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas” $\rightarrow 2x + 3y \leq 10$

“El material utilizado en cada mesa cuesta 4 €, y el utilizado en cada silla 2 €. El presupuesto para material es de 12 € diarios” $\rightarrow 4x + 2y \leq 12$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 4 \\ 2x + 3y \leq 10 \\ 4x + 2y \leq 12 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 4 \\ 2x + 3y \leq 10 \\ 2x + y \leq 6 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$x + y = 4$

$2x + 3y = 10$

$2x + y = 6$

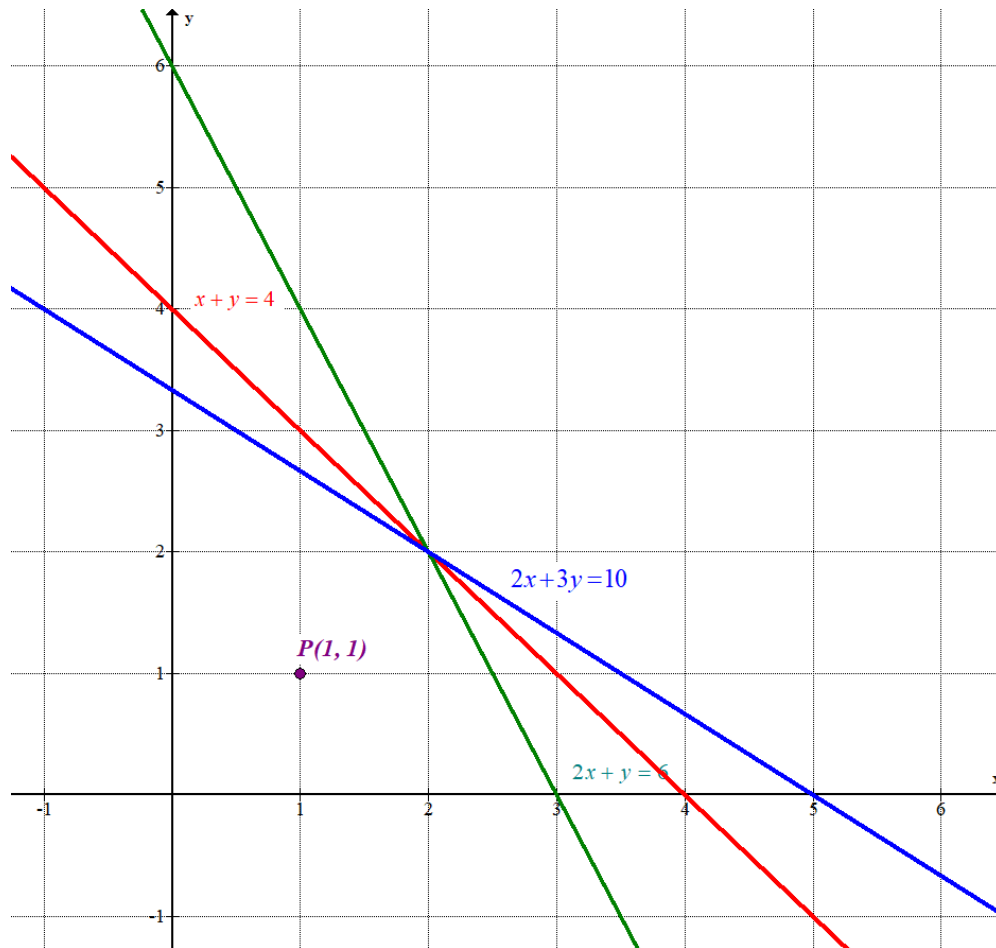
$x \geq 0; y \geq 0$

x	$y = 4 - x$
0	4
105	15
4	0

x	$y = \frac{10 - 2x}{3}$
-1	4
2	2
5	0

x	$y = 6 - 2x$
0	6
2	2
3	0

Primer
cuadrante



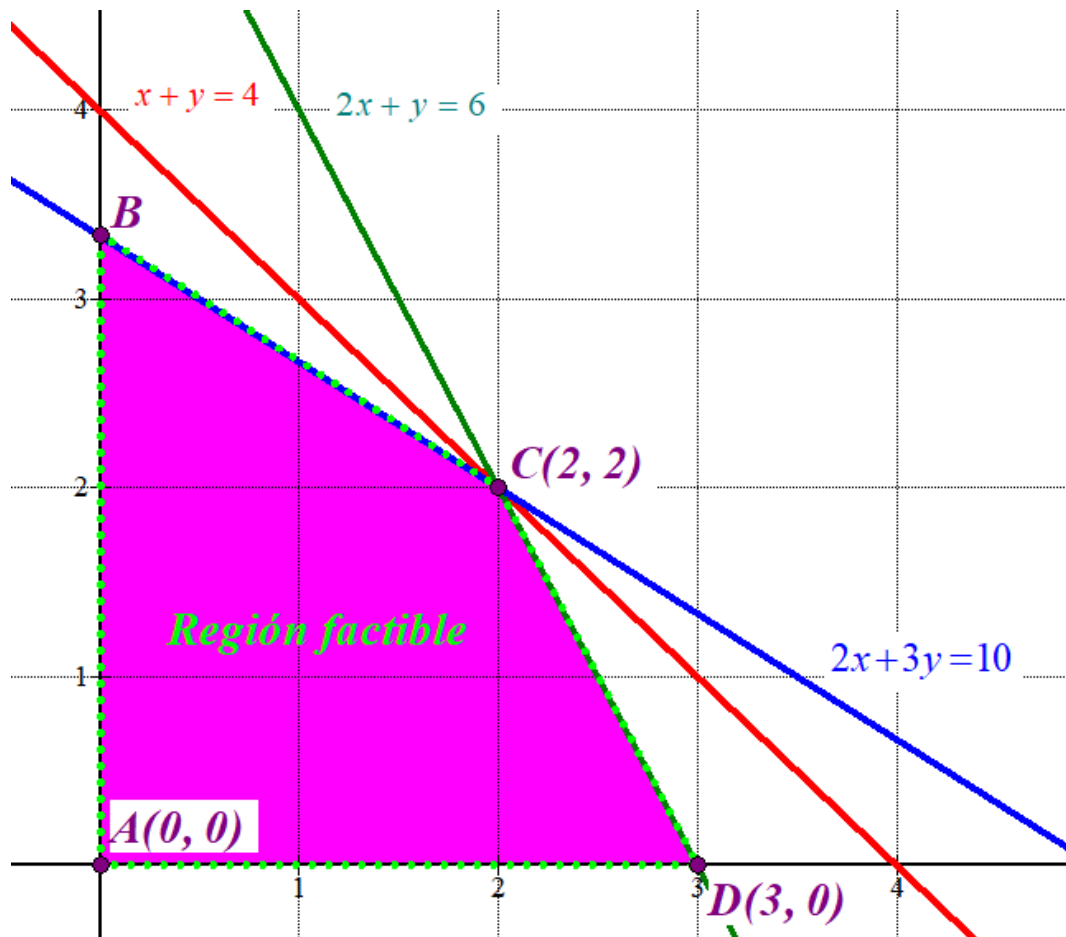
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + y \leq 4 \\ 2x + 3y \leq 10 \\ 2x + y \leq 6 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas azul, verde y roja.

Comprobamos que el punto $P(1, 1)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 1 + 1 \leq 4 \\ 2 + 3 \leq 10 \\ 2 + 1 \leq 6 \\ 1 \geq 0; 1 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Obtenemos las coordenadas del vértice B.

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ 2x + 3y = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow 3y = 10 \Rightarrow y = \frac{10}{3} \Rightarrow B\left(0, \frac{10}{3}\right)$$

Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 20x + 30y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0 \text{ €}$$

$$B\left(0, \frac{10}{3}\right) \rightarrow B\left(0, \frac{10}{3}\right) = 0 + 30 \frac{10}{3} = 100 \text{ € ¡Máximo!}$$

$$C(2, 2) \rightarrow B(2, 2) = 40 + 60 = 100 \text{ € ¡Máximo!}$$

$$D(3, 0) \rightarrow B(3, 0) = 60 + 0 = 60 \text{ €}$$

El máximo beneficio que se puede obtener en la región factible es 100 € y se obtiene en los puntos $B\left(0, \frac{10}{3}\right)$ y $C(2, 2)$.

El beneficio máximo se consigue en cualquier punto del segmento BC, pero como el número de sillas y mesas debe ser un número entero, solo existe la opción del punto $C(2, 2)$

El máximo beneficio que se puede obtener en la región factible es 100 € y se consigue fabricando 2 sillas y 2 mesas cada día.

- b) Hemos comprobado en el apartado anterior que el punto $P(1, 1)$ está en la región factible, por lo que fabricar 1 silla y 1 mesa cumple todas las restricciones. Evidentemente no es la solución óptima, pues los ingresos máximos se consiguen con la fabricación de 2 sillas y 2 mesas cada día. Por ejemplo solo se usarían 5 de las 10 horas diarias de trabajo y se conseguirían solo 50 € de beneficio.

BLOQUE: ANÁLISIS**A.2. [hasta 2,5 puntos]**

a) [0,8 puntos] La gráfica de la función $g(x) = ax^3 + bx + c$ tiene las siguientes características:

- Pasa por el punto (0,0).
- Tiene un mínimo relativo en el punto (1,-1).

Obtén el valor de los parámetros a , b y c .

b) [1 punto] Determina los máximos relativos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, y realiza su representación gráfica.

c) [0,7 puntos] Halla el área de la región limitada por el eje de abscisas OX, la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, y las rectas $x=3$ y $x=4$.

a) Pasa por el punto (0,0) $\rightarrow g(0) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} g(0) = 0 \\ g(x) = ax^3 + bx + c \end{array} \right\} \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

La función queda $g(x) = ax^3 + bx$

Tener un mínimo relativo en el punto (1,-1) implica dos cosas: pasa por el punto (1,-1) y la derivada se anula en $x=1 \rightarrow g(1) = -1$; $g'(1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = ax^3 + bx \\ g(1) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{-1 = a + b}$$

$$\left. \begin{array}{l} g'(x) = 3ax^2 + b \\ g'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{0 = 3a + b}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} a + b = -1 \\ 3a + b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b = -1 \\ b = -3a \end{array} \right\} \Rightarrow a - 3a = -1 \Rightarrow -2a = -1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{b = \frac{-3}{2}}$$

Los valores buscados son $a = 1/2$, $b = -3/2$ y $c = 0$.

La función queda $g(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$

b) Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Sustituimos en la segunda derivada para averiguar si son máximos, mínimos o punto de inflexión.

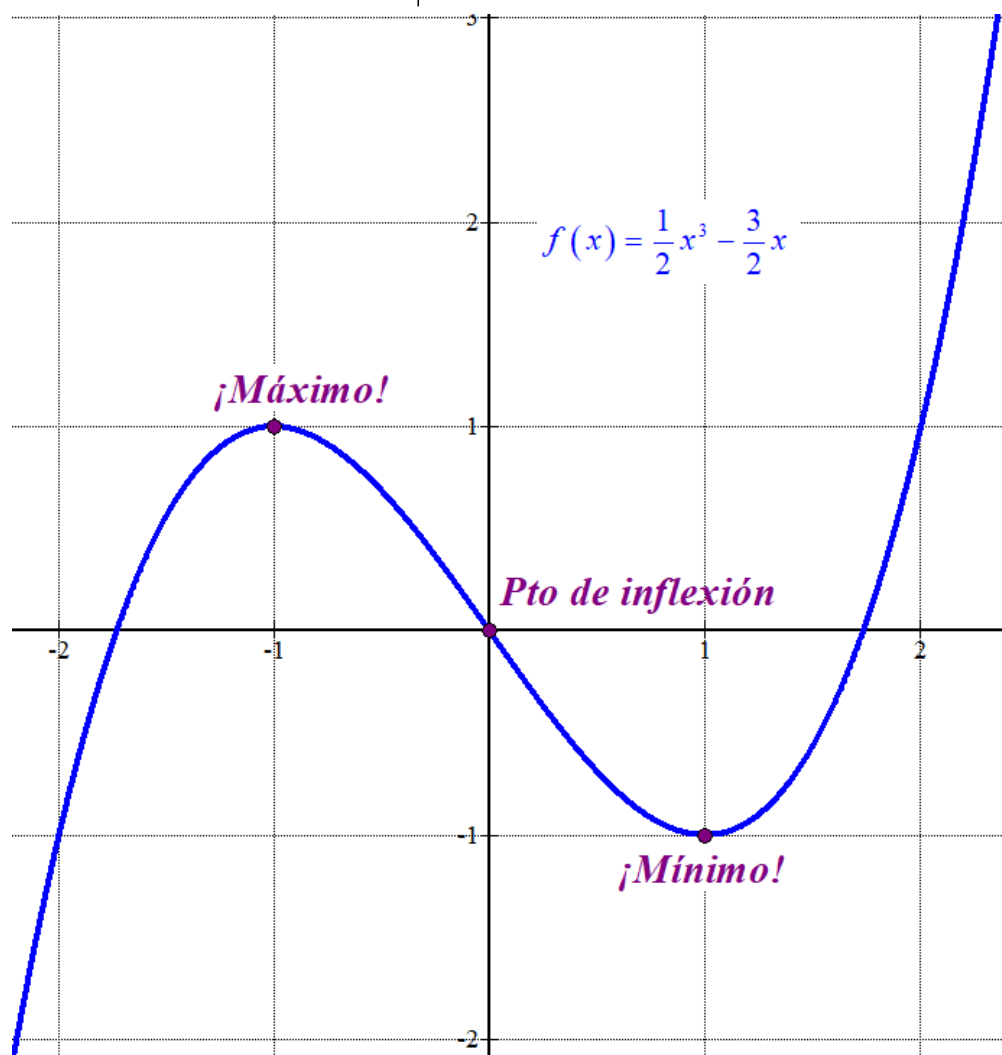
$$f''(x) = 3x \Rightarrow \begin{cases} f''(-1) = -3 < 0 \rightarrow x = -1 \text{ es máximo} \\ f''(1) = 3 > 0 \rightarrow x = 1 \text{ es mínimo} \end{cases}$$

Igualamos la segunda derivada a cero en busca de los puntos de inflexión.

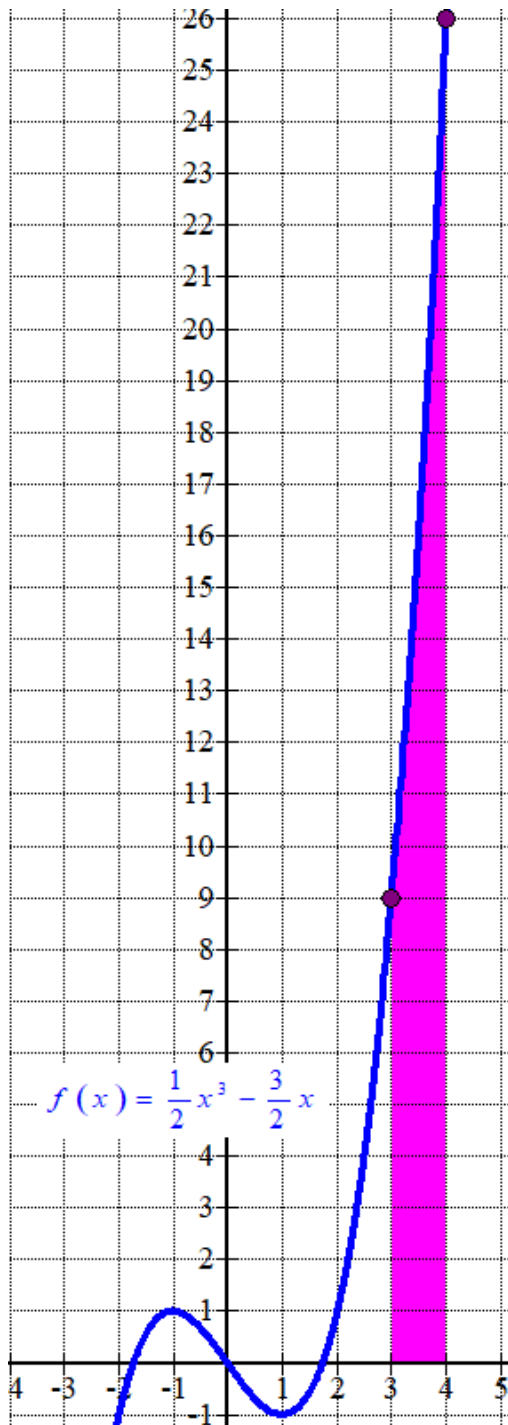
$$\begin{cases} f''(x) = 3x \\ f''(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Como la tercera derivada es $f'''(x) = 3$ al sustituir por $x = 0$ no se anula y podemos afirmar que la función tiene un punto de inflexión en $x = 0$. Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

x	$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$
-2	-1
-1	1
0	0
1	-1
2	1



c) Nos piden hallar el área de la región de color rosa del dibujo.



Calculamos el valor del área como la integral definida entre 3 y 4 de la función.

$$\text{Área} = \int_3^4 f(x) dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{2} x^3 - \frac{3}{2} x \right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2} \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2} \frac{x^2}{2} \right]_3^4 = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{3x^2}{4} \right]_3^4 =$$

$$= \left[\frac{4^4}{8} - \frac{3 \cdot 4^2}{4} \right] - \left[\frac{3^4}{8} - \frac{3 \cdot 3^2}{4} \right] =$$

$$= \frac{133}{8} = \boxed{16.625 \text{ u}^2}$$

B.2. [hasta 2,5 puntos]

Se considera la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 6 & \text{si } x \leq 1 \\ -2x^2 + 8x - 6 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) [1,7 puntos] Estudia la continuidad y derivabilidad de la función.

b) [0,4 puntos] Determina los extremos relativos de la función.

c) [0,4 puntos] Representa la gráfica de la función.

- a) Para que la función sea continua debe serlo en $x = 1$ y para ello deben coincidir los límites laterales de la función en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 2 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 6 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x^2 - 8x + 6 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} -2x^2 + 8x - 6 = -2 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 6 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0$$

La función es continua en $x = 1$ y por tanto es continua en todo su dominio $\mathbb{R}$.

Para que la función sea derivable debe serlo en $x = 1$. Comprobamos si coinciden sus derivadas laterales.

La derivada de la función en $\mathbb{R} - \{1\}$ es $f'(x) = \begin{cases} 4x - 8 & \text{si } x < 1 \\ -4x + 8 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Calculamos las derivadas laterales en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 4x - 8 = -4 \\ f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -4x + 8 = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(1^-) \neq f'(1^+)$$

La función no es derivable en $x = 1$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

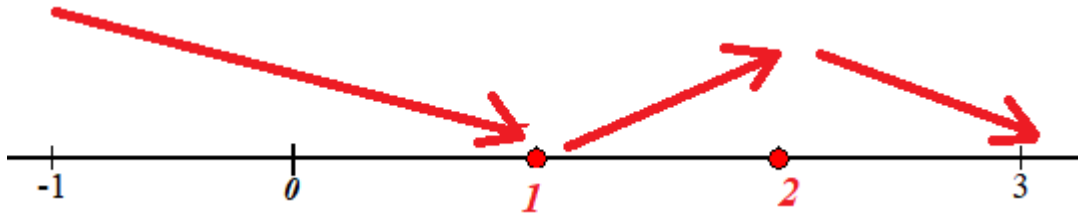
- b) Igualamos a cero su derivada en busca de los vértices de cada trozo de parábola.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x - 8 = 0 \rightarrow x = 2 \notin (-\infty, 1) \\ -4x + 8 = 0 \rightarrow x = 2 \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Estudiamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

- En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 4 \cdot 0 - 8 = -8 < 0$. La función decrece en $(-\infty, 1)$.
- En el intervalo $(1, 2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale $f'(1.5) = -4 \cdot 1.5 + 8 = 2 > 0$. La función crece en $(1, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = -4 \cdot 3 + 8 = -4 < 0$. La función decrece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:

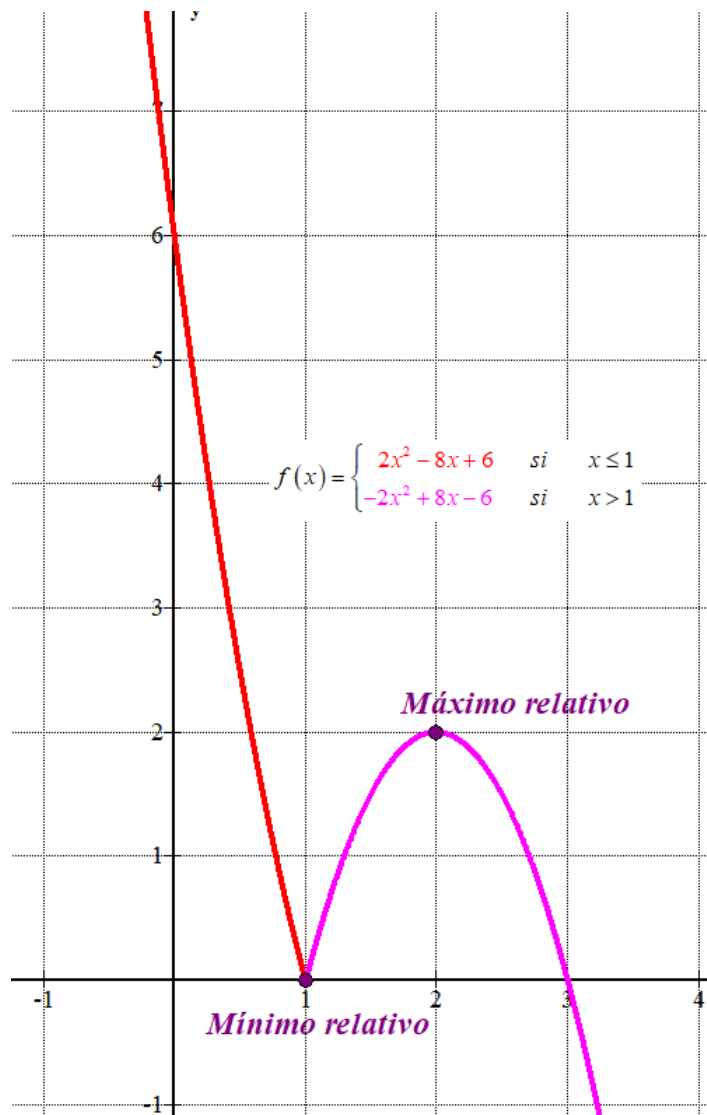


La función tiene un mínimo relativo en $x = 1$ y un máximo relativo en $x = 2$.

- c) Sabemos que la gráfica de la función son dos trozos de parábola.
Hasta $x = 1$ es una parábola convexa y a partir de 1 es una parábola cóncava con vértice en $x = 2$.

Hacemos una tabla de valores y representamos la función.

x	$y = 2x^2 - 8x + 6$	x	$y = -2x^2 + 8x - 6$
-1	16	1.5	1.5
0	6	2	2
1	0	3	0
		4	-6



BLOQUE: PROBABILIDAD**A.3. [hasta 2,5 puntos]**

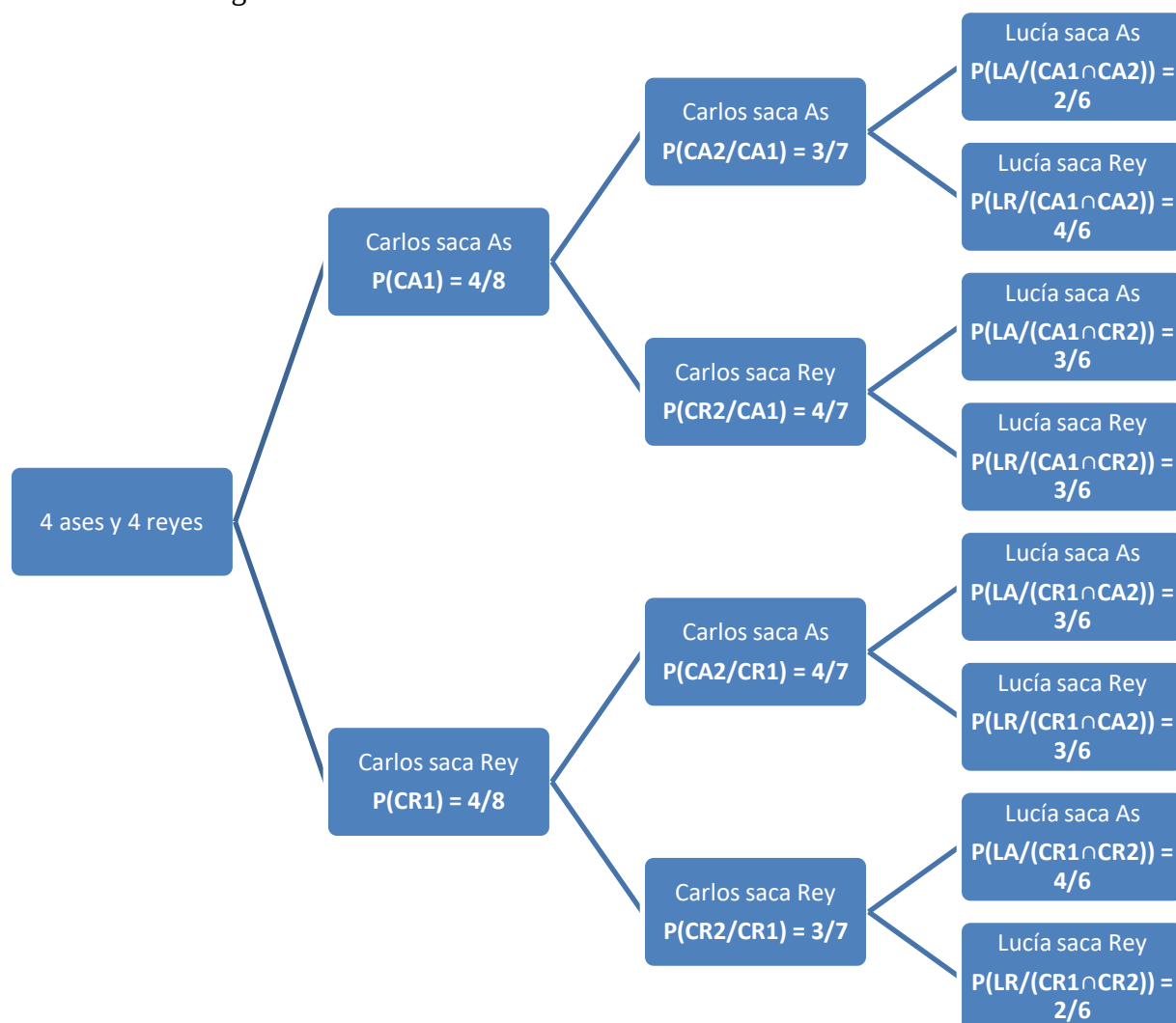
De una baraja, Lucía y Carlos han extraído 8 cartas: los cuatro ases y los cuatro reyes. De esas 8 cartas, Lucía le ha dado dos cartas a Carlos y, posteriormente, ha cogido una carta para ella.

Calcula:

- [0,4 puntos]** La probabilidad de que Carlos tenga dos ases.
- [0,6 puntos]** La probabilidad de que Carlos tenga un as y un rey.
- [0,7 puntos]** La probabilidad de que Lucía tenga un as y Carlos no tenga dos reyes.
- [0,8 puntos]** La probabilidad de que Lucía tenga un rey.

Llamamos $CA1$ = “Carlos saca un as en la primera carta”, $CA2$ = “Carlos saca un as en la segunda carta”, $CR1$ = “Carlos saca un rey en la primera carta”, $CR2$ = “Carlos saca un rey en la segunda carta” LA = “Lucía saca un as” y LR = “Lucía saca un rey”.

Realizamos un diagrama de árbol.



$$a) \quad P(CA1 \cap CA2) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{14} \approx 0.2143$$

- b) Nos piden calcular la probabilidad de sacar primero un rey y luego un as o primero un as y luego un rey.

$$P[(CA1 \cap CR2) \cup (CR1 \cap CA2)] = \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \boxed{\frac{4}{7} \approx 0.5714}$$

- c) Si miramos el diagrama de árbol superior esta situación planteada ocurre en tres de las ramas del árbol $\rightarrow CA1 \cap CA2 \cap LA; CA1 \cap CR2 \cap LA; CR1 \cap CA2 \cap LA$.

$$P(LA \cap (\overline{CR1 \cap CR2})) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \boxed{\frac{5}{14} \approx 0.3571}$$

- d) Este suceso puede pasar de 4 formas distintas.

$$P(LR) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Llamamos CA1 = "Carlos saca un as en la primera carta", CA1 = "Carlos saca un as en la segunda carta", CR1 = "Carlos saca un rey en la primera carta", CR2 = "Carlos saca un rey en la segunda carta" LA = "Lucia saca un as" y LR = "Lucía saca un rey".

a) $P(CA1 \cap CA2) = P(CA1)P(CA2 / CA1) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \boxed{\frac{3}{14} \approx 0.2143}$

- b) Nos piden calcular la probabilidad de sacar primero un rey y luego un as o primero un as y luego un rey.

$$\begin{aligned} P[(CA1 \cap CR2) \cup (CR1 \cap CA2)] &= P(CA1)P(CR2 / CA1) + P(CR1)P(CA2 / CR1) = \\ &= \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \boxed{\frac{4}{7} \approx 0.5714} \end{aligned}$$

- c) Esta situación planteada ocurre de tres formas diferentes $\rightarrow CA1 \cap CA2 \cap LA; CA1 \cap CR2 \cap LA; CR1 \cap CA2 \cap LA$.

$$\begin{aligned} P(LA \cap (\overline{CR1 \cap CR2})) &= \\ &= P(CA1 \cap CA2 \cap LA) + P(CA1 \cap CR2 \cap LA) + P(CR1 \cap CA2 \cap LA) = \\ &= P(CA1)P(CA2 / CA1)P(LA / (CA1 \cap CA2)) + \\ &+ P(CA1)P(CR2 / CA1)P(LA / (CA1 \cap CR2)) + \\ &+ P(CR1)P(CA2 / CR1)P(LA / (CR1 \cap CA2)) = \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \boxed{\frac{5}{14} \approx 0.3571}$$

d) Este suceso puede pasar de 4 formas distintas.

$$P(LR) =$$

$$= P(CA1 \cap CA2 \cap LR) + P(CA1 \cap CR2 \cap LR) + P(CR1 \cap CA2 \cap LR) + P(CR1 \cap CR2 \cap LR) =$$

$$= P(CA1)P(CA2/CA1)P(LR/(CA1 \cap CA2)) +$$

$$+ P(CA1)P(CR2/CA1)P(LR/(CA1 \cap CR2)) +$$

$$+ P(CR1)P(CA2/CR1)P(LR/(CR1 \cap CA2)) +$$

$$+ P(CR1)P(CR2/CR1)P(LR/(CR1 \cap CR2)) =$$

$$= \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5}$$

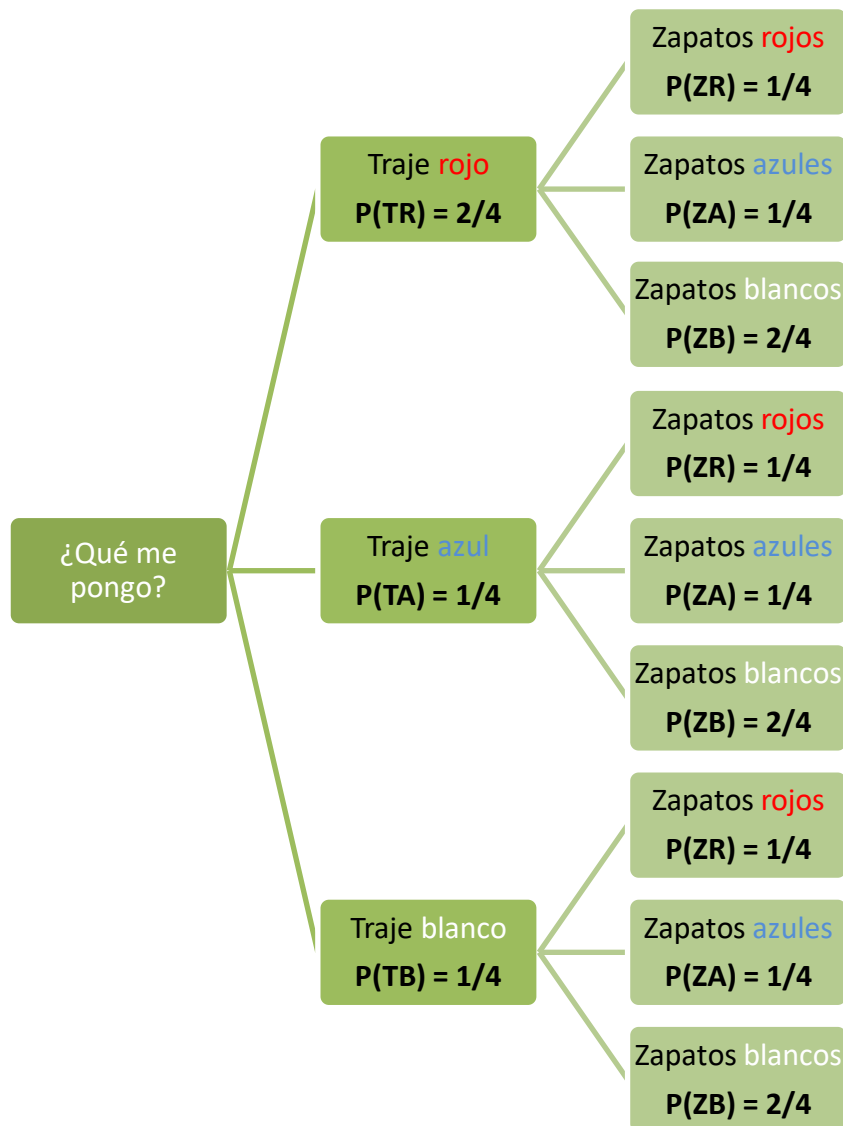
B.3. [hasta 2,5 puntos]

Jimena tiene dos trajes rojos, un traje azul y uno blanco. Además, tiene un par de zapatos de color rojo, otro par de color azul y dos pares blancos.

Si decide aleatoriamente qué ponerse, determina las probabilidades de los siguientes sucesos:

- [[0,3 puntos]] Llevar traje rojo y zapatos blancos.
- [[0,4 puntos]] No ir vestida totalmente de blanco.
- [[0,4 puntos]] Llevar zapatos azules.
- [[0,5 puntos]] Llevar zapatos azules o blancos.
- [[0,4 puntos]] Ir vestida totalmente del mismo color.
- [[0,5 puntos]] Llevar zapatos rojos, sabiendo que no está vestida totalmente del mismo color.

Hacemos un diagrama de árbol.



Los sucesos elegir un traje y elegir unos zapatos son independientes.

- a) Nos piden calcular $P(TR \cap ZB)$.

$$P(TR \cap ZB) = P(TR)P(ZB) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{4} = 0.25}$$

b) Nos piden calcular $P(\overline{TB \cap ZB})$.

$$P(\overline{TB \cap ZB}) = 1 - P(TB \cap ZB) = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} = 1 - \frac{1}{8} = \boxed{\frac{7}{8} = 0.875}$$

c) Nos piden calcular $P(ZA) = \boxed{\frac{1}{4}}$.

d) Nos piden calcular $P(ZA \cup ZB)$. Como de los 4 pares de zapatos hay 1 par azules y 2 pares blancos hay 3 casos favorables y 4 posibles. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(ZA \cup ZB) = \boxed{\frac{3}{4} = 0.75}$$

e) Llamamos MC al suceso “ir vestida del mismo color”. Este suceso es

$$MC = (TR \cap ZR) \cup (TA \cap ZA) \cup (TB \cap ZB).$$

$$P(MC) = P[(TR \cap ZR) \cup (TA \cap ZA) \cup (TB \cap ZB)] =$$

$$= P(TR \cap ZR) + P(TA \cap ZA) + P(TB \cap ZB) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} = \boxed{\frac{5}{16} = 0.3125}$$

f) Nos piden calcular $P(ZR / \overline{MC})$.

$$P(ZR / \overline{MC}) = \frac{P(ZR \cap \overline{MC})}{P(\overline{MC})} = \frac{P(TR \cap ZR)}{1 - P(MC)} = \frac{\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4}}{1 - \frac{5}{16}} = \frac{\frac{2}{16}}{\frac{11}{16}} = \boxed{\frac{2}{11} \approx 0.1818}$$

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA**A.4. [hasta 2,5 puntos]**

El número de horas semanales que las y los estudiantes de bachillerato de una determinada ciudad dedican al deporte es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media 8 y varianza 7,29.

Se elige una muestra aleatoria simple de tamaño 36.

a) **[0,7 puntos]** Indica cuál es la distribución de la media muestral, $\bar{X}$.

b) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que el número medio de horas semanales que dedican al deporte esté entre 7,82 y 8,36?

c) **[0,7 puntos]** En la distribución de la media muestral $\bar{X}$, obtén el intervalo característico para el 99 %.

X = El número de horas semanales que las y los estudiantes de bachillerato de una determinada ciudad dedican al deporte.

Varianza = 7.29 $\rightarrow$ Desviación típica = $\sigma = \sqrt{7.29} = 2.7$

$X \sim N(8, 2.7)$

$$a) X = N(8, 2.7) \Rightarrow \bar{X}_{36} = N\left(8, \frac{2.7}{\sqrt{36}}\right) \Rightarrow \boxed{\bar{X}_{36} = N(8, 0.45)}$$

$$b) \text{ Nos piden calcular } P(7.82 \leq \bar{X}_{36} \leq 8.36)$$

$$P(7.82 \leq \bar{X}_{36} \leq 8.36) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{7.82-8}{0.45} \leq \frac{\bar{X}_{36}-8}{0.45} \leq \frac{8.36-8}{0.45}\right) =$$

$$= P(-0.4 \leq Z \leq 0.8) = P(Z \leq 0.8) - P(Z \leq -0.4) =$$

$$= P(Z \leq 0.8) - P(Z \geq 0.4) = P(Z \leq 0.8) - [1 - P(Z \leq 0.4)] =$$

$$= 0.7881 - 1 + 0.6554 = \boxed{0.4435}$$

c) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 99% el $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.575$$

Calculamos el intervalo característico.

$$(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma, \mu + z_{\alpha/2} \cdot \sigma) = (8 - 2.575 \cdot 0.45, 8 + 2.575 \cdot 0.45) = (6.8412, 9.1587)$$

B.4. [hasta 2,5 puntos]

En una cierta universidad se ha tomado una muestra aleatoria simple de 400 estudiantes, y se ha observado que de ellos 160 han aprobado todas las asignaturas.

a) **[1,2 puntos]** Estima el porcentaje de estudiantes de esa universidad que aprueban todas las asignaturas, con un nivel de confianza del 97 %.

b) **[0,5 puntos]** Calcula el error máximo admisible, con el nivel de confianza indicado.

c) **[0,7 puntos]** A la vista del resultado anterior, se quiere repetir la experiencia para conseguir que el error máximo admisible no sea superior a 0,04, con el mismo nivel de confianza. ¿Cuántos estudiantes, como mínimo, ha de tener la muestra?

a) X = Número de alumnos que aprueban todas las materias de un grupo de 400.

Proporción muestral $p = \frac{160}{400} = 0.4$. Tamaño de la muestra = $n = 400$

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 97% el $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

Utilizando la fórmula del error:

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{400}} = 0.0532$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - \text{Error}, p + \text{Error}) = (0.4 - 0.0532, 0.4 + 0.0532) = (0.3468, 0.4532)$$

El porcentaje de estudiantes de la universidad que han aprobado todas las asignaturas está entre el 34.68 % y el 45.32 % con un nivel de confianza del 97 %.

b) El error máximo lo hemos calculado en el apartado a) y es Error = 0.0532.

El error máximo es de un 5.32 %.

c) Usamos la fórmula del error para un error del 0.04.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow 0.04 = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{n}} \Rightarrow \frac{0.04}{2.17} = \sqrt{\frac{0.24}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.04}{2.17} \right)^2 = \frac{0.24}{n} \Rightarrow n = \frac{0.24}{\left(\frac{0.04}{2.17} \right)^2} \approx 706.33$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser un número entero superior al obtenido.

El tamaño mínimo de la muestra es de 707 estudiantes para que el error máximo admisible sea 0.04, con un nivel de confianza del 97%.