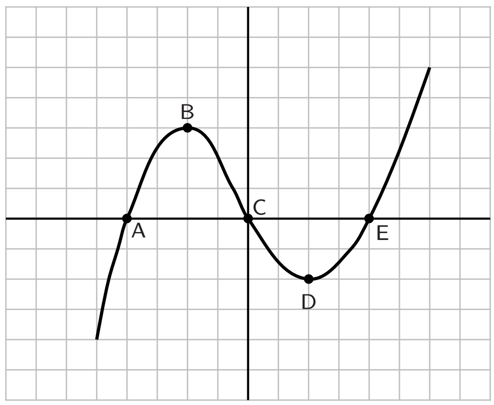
Transformaciones geométricas en las funciones

1

Dada la gráfica de la función $y = f(x)$:



Representa a partir de ella las siguientes funciones, escribiendo en cada caso las coordenadas de los puntos A, B, C, D y E:

a) $y = |f(x)|$ **b)** $y = f(x-1)$ **c)** $y = f(x)+2$ **d)** $y = f(-x)$ **e)** $y = -f(x)$

2

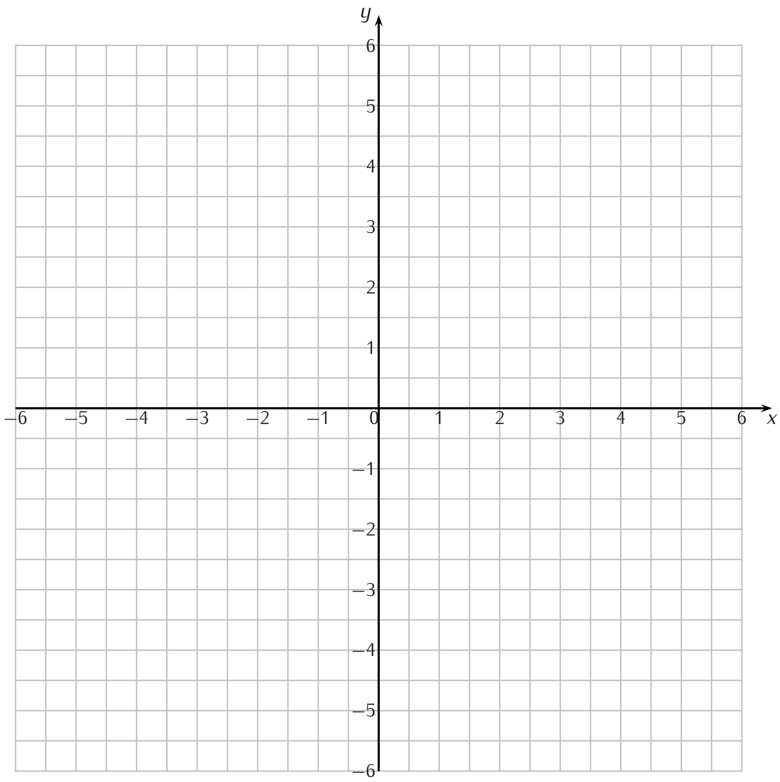
Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = |x|$, representa gráficamente las funciones $y = f(g(x))$ e $y = g(f(x))$.

3

Sea $f(x) = 2x + 1$.

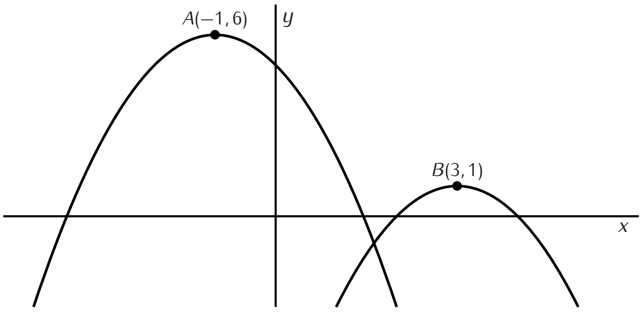
a) Dibuje la gráfica de $f(x)$ para $0 \leq x \leq 2$ en la cuadrícula inferior.

b) Sea $g(x) = f(x+3) - 2$. Dibuje, en la misma cuadrícula, la gráfica de $g(x)$ para $-3 \leq x \leq -1$.



4

En la siguiente figura, si la parábola con vértice A tiene por ecuación $y = f(x)$, ¿cuál será la ecuación de la parábola con vértice B?



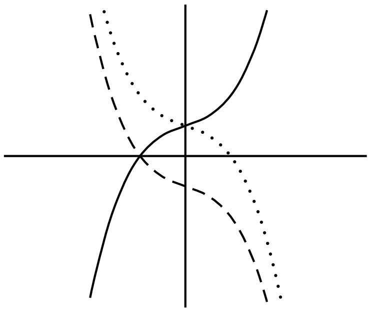
5

La gráfica de la función $y = x^2$ se convierte en la de $y = 5 - 3(x - 4)^2$ mediante cuatro transformaciones. Escribe la ecuación de la función tras cada transformación, especificando cuáles son los valores de k, p y q:

- una simetría respecto de la recta $y = 0$.
- un estiramiento vertical con factor de escala k.
- una traslación horizontal de p unidades.
- una traslación vertical de q unidades.

6

La siguiente figura muestra la gráfica de la función $y = x^3 + x + 2$ (en trazo continuo), y la gráfica de otras dos funciones (una en línea discontinua y otra punteada). Escribe la expresión algebraica de estas dos funciones.



7

Dada la función $y = 2x^2 - 12x + 23$:

a) Exprésela en la forma $y = 2(x - c)^2 + d$.

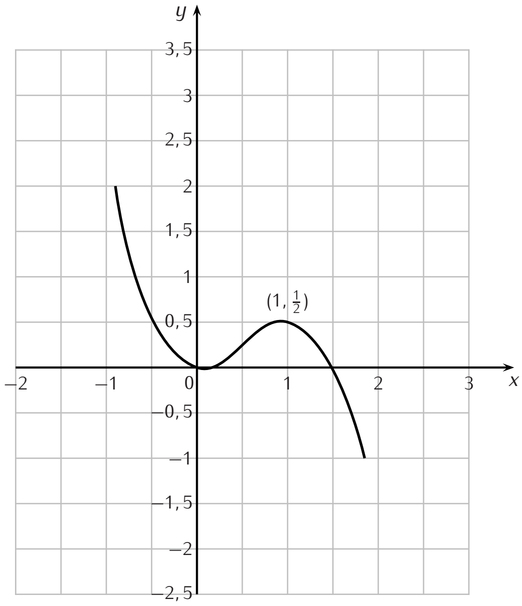
b) La gráfica de $y = x^2$ se transforma en la gráfica de $y = 2x^2 - 12x + 23$ mediante las transformaciones:

- un estiramiento vertical de razón k seguido de
- una traslación horizontal de p unidades seguida de
- una traslación vertical de q unidades.

Escriba el valor de k, p y q.

8

El siguiente diagrama muestra la gráfica de $y = f(x)$. Tiene un punto mínimo y un punto máximo en $(0, 0)$ y $(1, \frac{1}{2})$.



a) Sobre la misma figura dibuje la gráfica de $y = f(x-1) + \dfrac{3}{2}$.

b) ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos mínimo y máximo de $y = f(x-1) + \dfrac{3}{2}$?

9

Sea $f(x) = 3(x+1)^2 - 12$.

a) Muestre que $f(x) = 3x^2 + 6x - 9$.

b) Respecto al gráfico de f:

i) escriba las coordenadas del vértice;

ii) escriba el punto de corte con el eje y;

iii) halle los puntos de corte con el eje x.

c) **A partir de lo anterior** dibuje aproximadamente el gráfico de f.

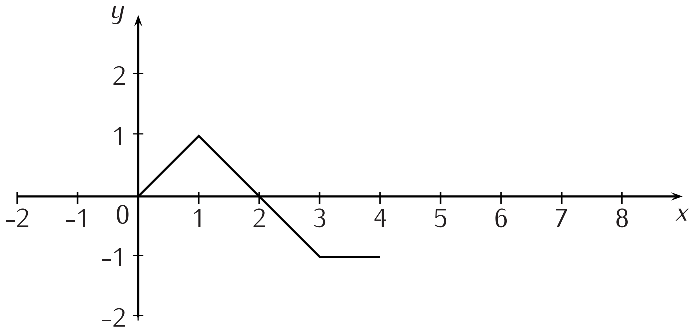
d) Sea $g(x) = x^2$. El gráfico de f se puede obtener a partir del gráfico de g mediante las dos transformaciones siguientes:

- un estiramiento de razón t en la dirección del eje y,
- seguido de una traslación mediante $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

Escriba $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ y el valor de t.

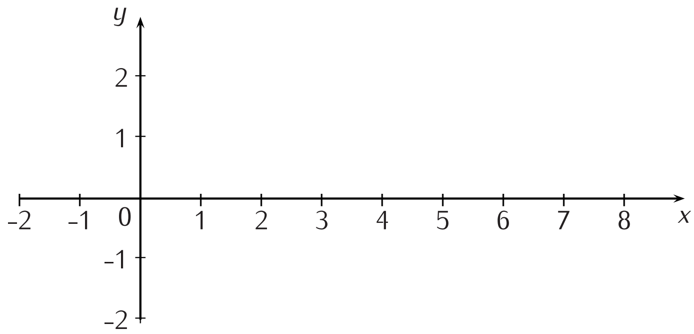
10

La siguiente figura muestra la gráfica de $y = f(x)$.

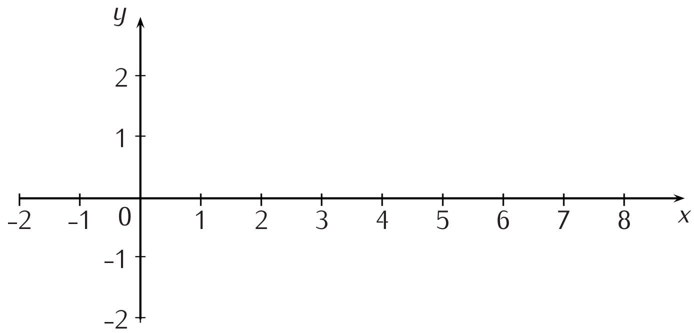


a) Dibuje sobre los siguientes ejes cada una de las gráficas pedidas.

i) $y = 2f(x)$;



ii) $y = f(x - 3)$.



b) El punto $A(3, -1)$ pertenece a la gráfica de f. El punto A' es el punto correspondiente sobre la gráfica de $y = -f(x) + 1$. Halle las coordenadas de A'.

11

Sea $f(x) = 3x^2 - 6x + p$. La ecuación $f(x) = 0$ tiene dos raíces iguales.

a) i) Escriba el **valor** del discriminante.

ii) A partir de lo anterior, muestre que $p = 3$.

b) El vértice del gráfico de f está situado sobre el eje x. Halle las coordenadas del vértice.

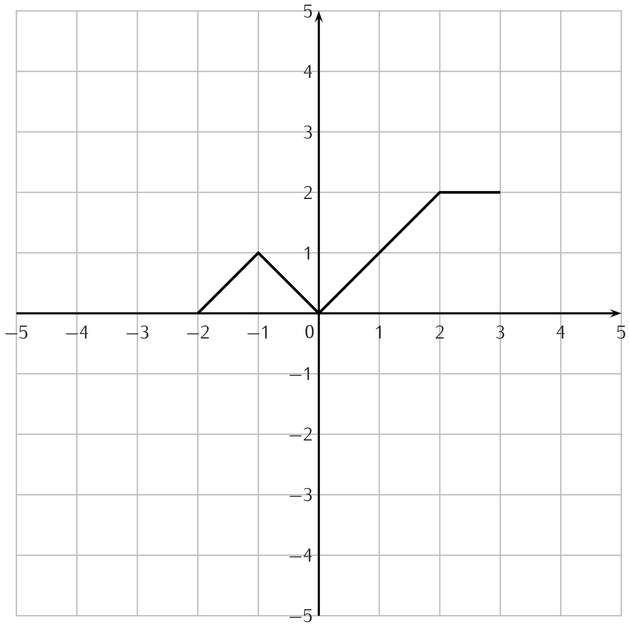
c) Escriba la solución de $f(x) = 0$.

d) La función se puede escribir en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Escriba el valor de a, h y k.

e) El gráfico de la función g se obtiene a partir del gráfico de f mediante una simetría de f respecto al eje x, seguida de una traslación por el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$. Halle g, de la forma $g(x) = Ax^2 + Bx + C$.

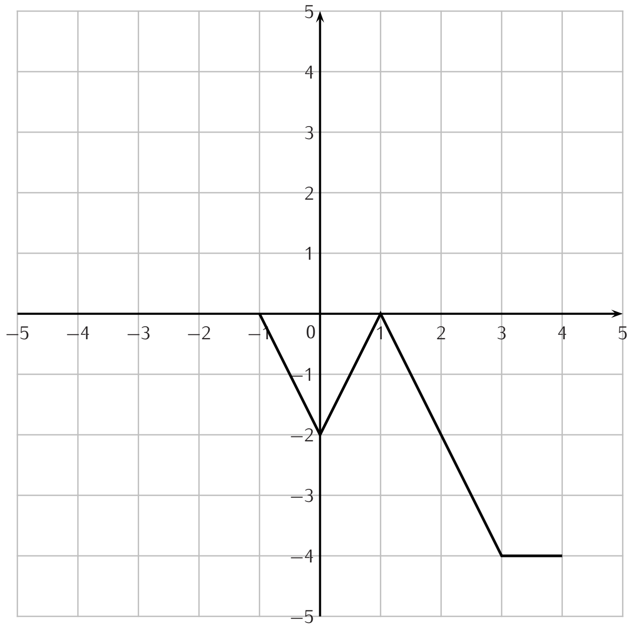
12

La figura que aparece a continuación muestra la gráfica de una función $f(x)$, para $-2 \leq x \leq 3$.



a) Dibuje aproximadamente la gráfica de $f(-x)$.

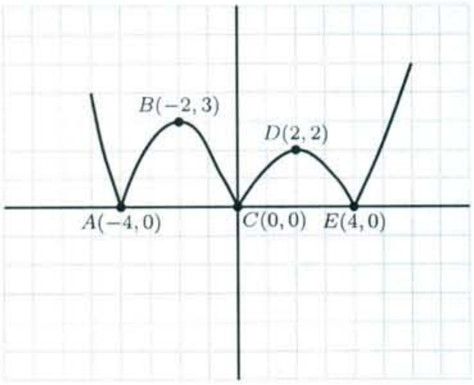
b) La gráfica de f se transforma de modo tal que se obtiene la gráfica de g. A continuación se muestra la gráfica de g.



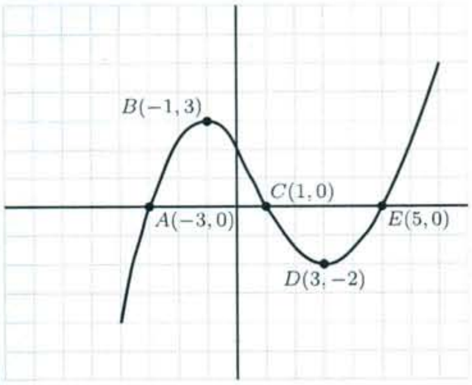
La función g se puede escribir en la forma $g(x) = af(x+b)$. Escriba el valor de a y el de b.

FUNCIONES: TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS. SOLUCIONES (hoja 11)

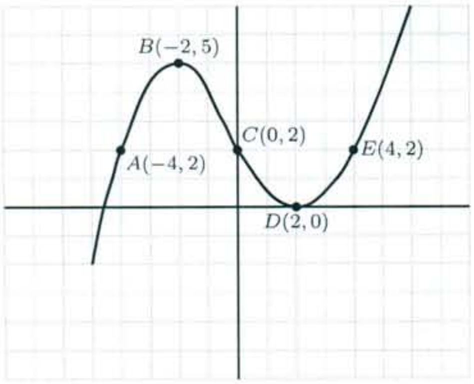
1. **Solución:**



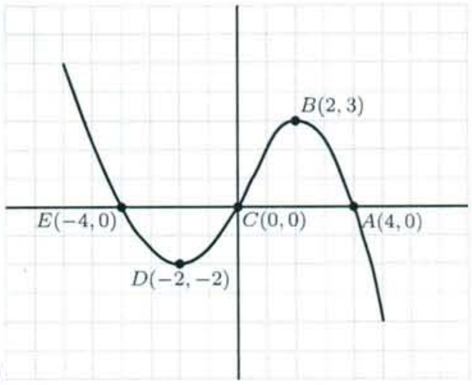
a)



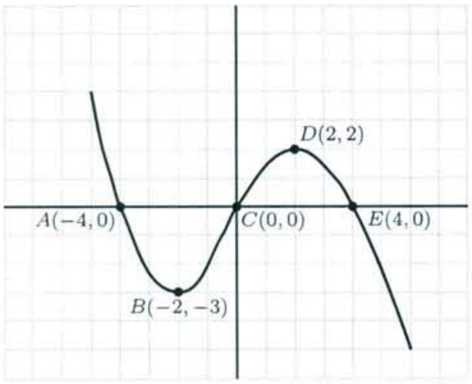
b)



c)



d)

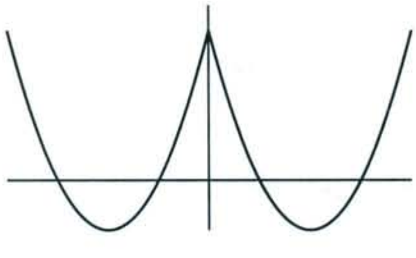


e)

2. **Solución:**

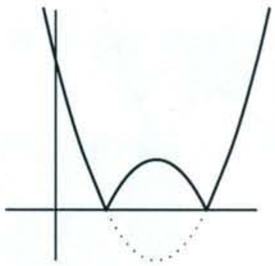
- $y = f(g(x)) = f(|x|) = |x|^2 + 4|x| + 3$

  Para dibujar $f(|x|)$ basta trazar la función $f(x)$ para valores positivos de la variable x, y realizar la simétrica respecto del eje OY:

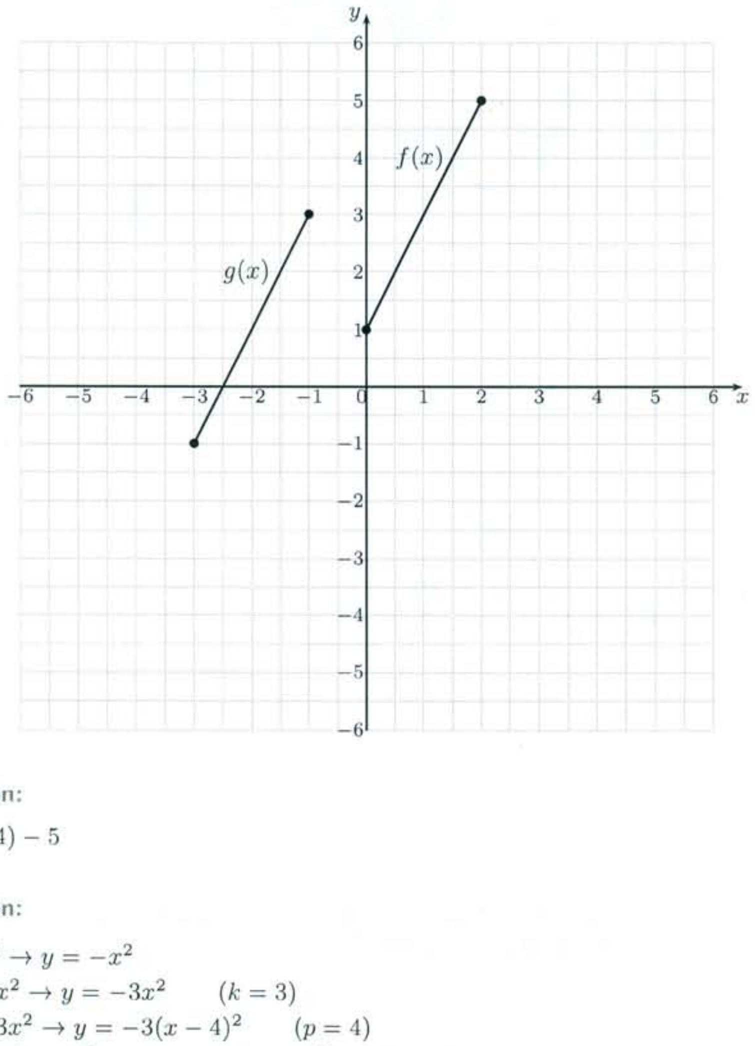


- $y = g(f(x)) = g(x^2 - 4x + 3) = |x^2 - 4x + 3|$

  Para representar el valor absoluto de una función, primero se representa sin valor absoluto, y aquellos trozos situados por debajo del eje OX los situamos por encima, de forma simétrica:



3. **Solución:**



4. **Solución:**

$y = f(x-4) - 5$

5. **Solución:**

- $y = x^2 \to y = -x^2$
- $y = -x^2 \to y = -3x^2 \qquad (k = 3)$
- $y = -3x^2 \to y = -3(x-4)^2 \qquad (p = 4)$
- $y = -3(x-4)^2 \to y = 5 - 3(x-4)^2 \qquad (q = 5)$

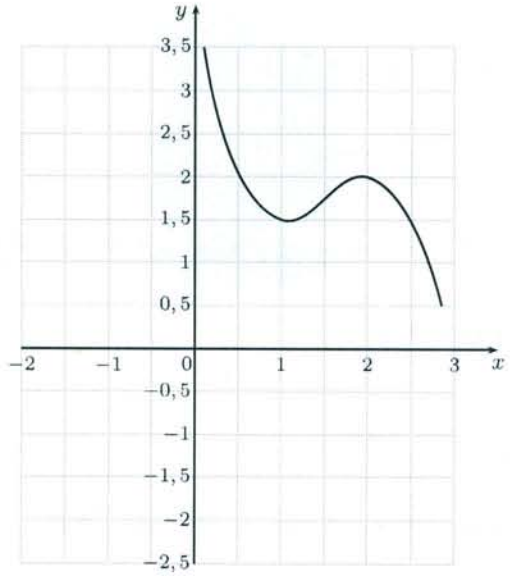
6. **Solución:**

- Línea punteada: simétrica respecto del eje OY.
  $y = f(-x) = (-x)^3 + (-x) + 2 = -x^3 - x + 2$

- Línea discontinua: simétrica respecto del eje OX.
  $y = -f(x) = -(x^3 + x + 2) = -x^3 - x - 2$

8. Solución:

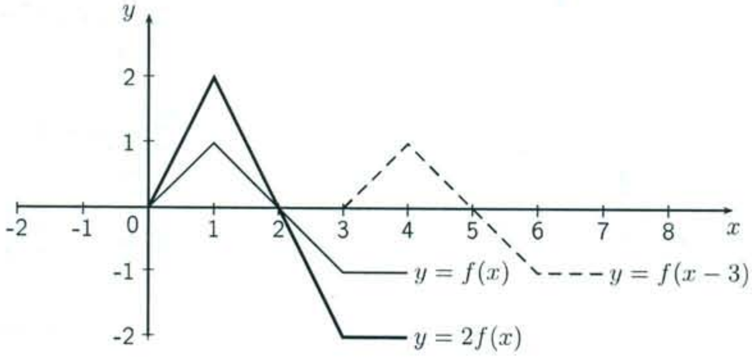
a)



b) Mínimo: $(1, \frac{3}{2})$ Máximo: $(2, 2)$

10. Solución:

a)



b) $-f(x)$ es simétrica de $f(x)$ respecto del eje OX: el punto $(3, -1)$ se transforma en $(3, 1)$.
$-f(x) + 1$: traslación vertical de 1 unidad, luego el punto $(3, 1)$ se transforma en $(3, 2)$.
Por tanto, $A'(3, 2)$.
O también: $f(3) = -1$; $-f(3) + 1 = -(-1) + 1 = 2$; $A'(3, 2)$

(7) a) $y=2x^2-12x+23=2\left(x^2-6x+\frac{23}{2}\right)=2\left(x^2-6x+9-9+\frac{23}{2}\right)=$

$=2\left[(x-3)^2+\frac{5}{2}\right]=2(x-3)^2+5$

b) $y=x^2$

- $y=2x^2 \quad (K=2)$
- $y=2(x-3)^2 \quad (p=3)$
- $y=2(x-3)^2+5 \quad (q=5)$

---

(9) a) $f(x)=3(x+1)^2-12=3(x^2+2x+1)-12=3x^2+6x+3-12=$

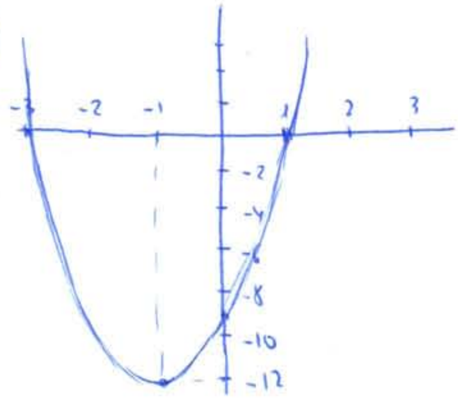
$=3x^2+6x-9$

b) i) $V(-1,-12)$

ii) Corte eje OY : $(0,-9)$

iii) $3x^2+6x-9=0 \Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow x=\begin{cases}-3 \Rightarrow (-3,0)\\ 1 \Rightarrow (1,0)\end{cases}$

c)



d) $g(x)=x^2$

$3\cdot g(x)=3x^2 \Rightarrow \boxed{t=3}$

$3g(x+1)-12=3(x+1)^2-12=f(x)$

luego $\binom{p}{q}=\binom{-1}{-12}$

---

(11) a) $f(x)=3x^2-6x+p=0$

i) $\Delta=36-4\cdot 3\cdot p=36-12p$; ii) $\Delta=0 \Rightarrow 36-12p=0 \rightarrow p=3$

b) $f(x)=3x^2-6x+3=3(x^2-2x+1)=3(x-1)^2 \Rightarrow V(1,0)$

c) $f(x)=0 \Rightarrow 3(x-1)^2=0 \rightarrow x=1$

d) $f(x) = 3(x-1)^2 \rightarrow a = 3 \;;\; h = 1 \;;\; k = 0.$

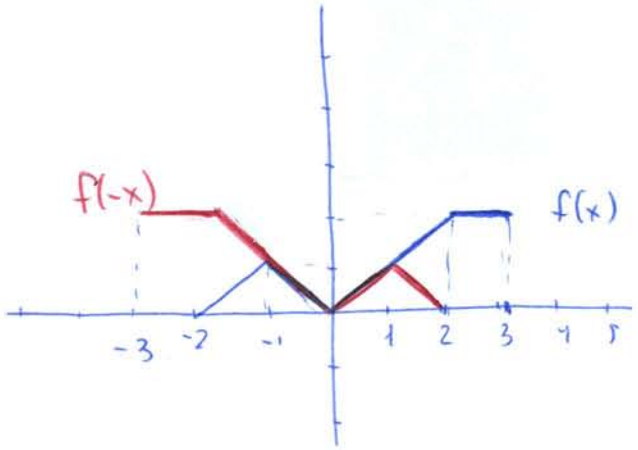
e) · Simetría respecto al eje OX: $-f(x) = -3x^2 + 6x - 3$

· Traslación según $\binom{0}{6}$: $g(x) = -3x^2 + 6x - 3 + 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) = -3x^2 + 6x + 3$

---

12 a)



b) $f(x) \xrightarrow[\text{resp. OX}]{\text{simetría}} -f(x) \xrightarrow[\text{vertical}(\times 2)]{\text{estiramiento}} -2f(x) \xrightarrow[\text{según } \binom{1}{0}]{\text{traslación horizontal}}$

$\rightarrow -2f(x-1) + 0 = -2f(x-1)$ $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1. \end{cases}$
