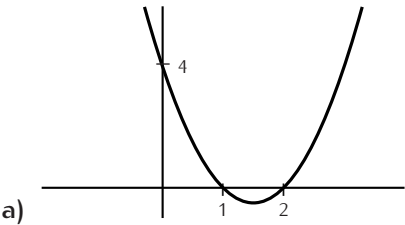
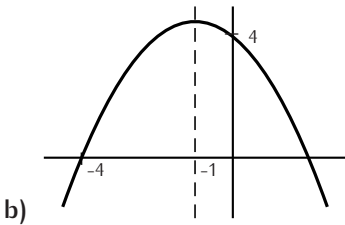
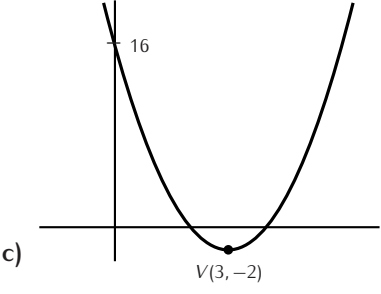
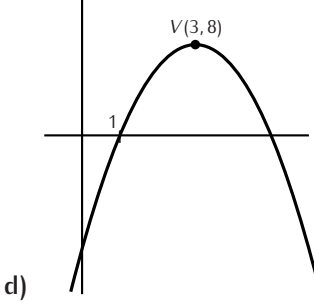


Funciones Algebraicas

1	a) Expresa $f(x) = x^2 - 6x + 14$ en la forma $f(x) = (x - h)^2 + k$, en la que hay que determinar h y k. b) Partiendo de aquí, o de otro modo, escriba las coordenadas del vértice de la parábola de ecuación $y = x^2 - 6x + 14$.
2	a) Representa gráficamente la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$. b) ¿Cómo deberíamos restringir el dominio de $f(x)$ para que exista $f^{-1}(x)$? En este supuesto, dibuja la gráfica de $f^{-1}(x)$ (en los mismos ejes que en el apartado anterior) c) Halla algebraicamente $f^{-1}(x)$ (sugerencia: expresa $f(x)$ en la forma $(x - h)^2 + k$).
3	Para cada una de las siguientes funciones: - Halla los puntos de corte con los ejes OX y OY. - Halla las coordenadas del vértice y la ecuación del eje. - Dibuja la gráfica de la función. a) $f(x) = -x^2 + 3x - 5$ b) $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ c) $f(x) = 2(x + 1)(x - 3)$ d) $f(x) = -2x(x + 2)$ e) $f(x) = -2(x - 2)^2 - 1$ f) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^2$
4	Halla la ecuación de la parábola cuya gráfica es cada una de las siguientes: a)  b)  c)  d) 

5



Representa gráficamente (sin calculadora) las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 2 \\ (x - 3)^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x > 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + 4 & \text{si } -4 \leq x < -2 \\ 2 & \text{si } -2 \leq x \leq 3 \\ 1 - x & \text{si } 3 < x < 5 \end{cases}$$

6

Un pastelero estima que el beneficio en euros, por hacer x pasteles diarios, está dado por la función $P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 16x - 30$.

a) Calcula el beneficio si hace diariamente:

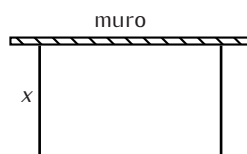
- 0 pasteles.
- 10 pasteles.

b) ¿Cuántos pasteles debe fabricar al día para obtener un beneficio de 57 €?

c) ¿Cuántos pasteles debe fabricar al día para alcanzar el máximo beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

7

Un jardinero dispone de 40 metros de valla para cercar una parcela rectangular, uno de cuyos lados es un muro de piedra ya existente. Si la anchura de la parcela es x metros, como se muestra en la figura:

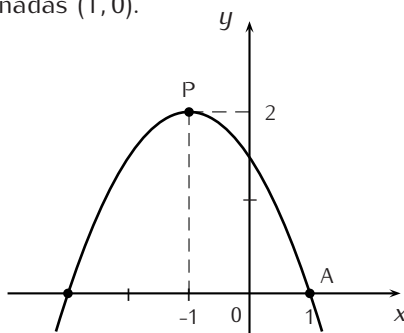


a) Halla la expresión del área A de la parcela, en función de x .

b) Halla cuánto debe valer x para que la parcela tenga área máxima. ¿Cuál es dicha área máxima?

8

En la figura aparece parte de la gráfica de $y = a(x - h)^2 + k$. La gráfica tiene su vértice en P , y pasa por el punto A de coordenadas $(1, 0)$.

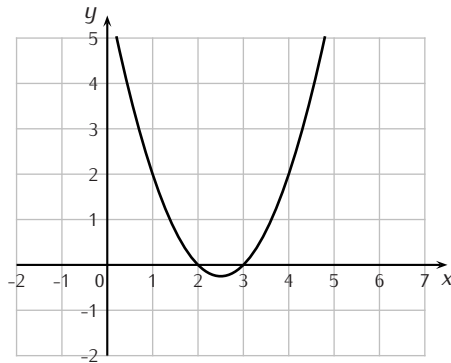


a) Escriba el valor de h y k .

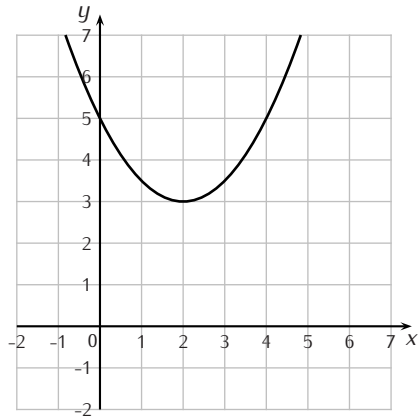
b) Calcule el valor de a .

9

- a) El siguiente diagrama muestra parte de la gráfica de una función cuadrática $f(x) = x^2 + bx + c$, que corta al eje x en $x = 2$ y en $x = 3$. Halle el valor de b y c .



- b) El siguiente diagrama muestra parte de la gráfica de otra función cuadrática g , que se puede escribir en la forma $g(x) = a(x - h)^2 + 3$. Tiene su vértice en $(2, 3)$ y corta el eje y en 5.



a) Escriba el valor de h .

b) Halle el valor de a .

10

Sea $f(x) = p(x - q)(x - r)$. La gráfica de $f(x)$ pasa por los puntos $(-2, 0)$, $(0, -4)$ y $(4, 0)$.

- a) Escriba el valor de q y el de r .
 b) Escriba la **ecuación** del eje de simetría.
 c) Halle el valor de p .



11

Sea f una función cuadrática. Los puntos de intersección con el eje x son $(-4, 0)$ y $(6, 0)$, y el punto de intersección con el eje y es $(0, 240)$.

- a) Escriba $f(x)$ de la forma $f(x) = -10(x - p)(x - q)$.
 b) Halle otra expresión para $f(x)$, de la forma $f(x) = -10(x - h)^2 + k$.
 c) Compruebe que $f(x)$ también se puede escribir de la forma $f(x) = 240 + 20x - 10x^2$.



12



Sea $f(x) = a(x+3)(x-1)$. La gráfica de f tiene intersecciones con el eje x en $(p, 0)$ y $(q, 0)$ y una intersección con el eje y en $(0, 12)$.

- a)
 - i) Escriba el valor de p y el de q .
 - ii) Halle el valor de a .
- b) Halle la ecuación del eje de simetría del gráfico de f .
- c) Halle el mayor valor de f .
- d) La función f también se puede escribir en la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$. Halle el valor de h y el de k .

13

Considere dos funciones cuadráticas distintas, ambas de la forma $f(x) = 4x^2 - qx + 25$. El gráfico de cada función tiene su vértice sobre el eje x .

- a) Halle los dos valores de q .
- b) Para el mayor valor de q , resuelva $f(x) = 0$.
- c) Halle las coordenadas del punto de intersección entre las dos gráficas.

14



Una roca cae desde lo alto de un acantilado. Sea h su altura en metros sobre el suelo, a los t segundos.

La siguiente tabla muestra los valores de h y t .

t (segundos)	1	2	3	4	5
h (metros)	105	98	84	60	26

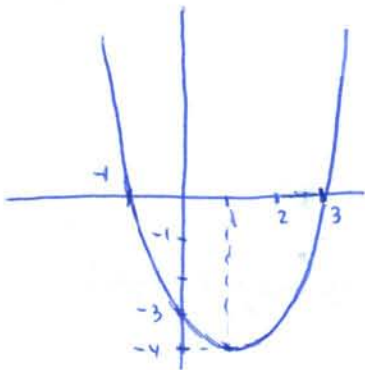
- a) Jane opina que la función $f(t) = -0.25t^3 - 2.32t^2 + 1.93t + 106$ es un modelo adecuado para describir los datos. Utilice el modelo de Jane para
 - i) escribir la altura del acantilado;
 - ii) hallar la altura de la roca después de 4.5 segundos;
 - iii) hallar cuántos segundos han transcurrido cuando la altura de la roca es de 30 m.
- b) Kevin opina que la función $g(t) = -5.2t^2 + 9.5t + 100$ es un modelo más adecuado para describir los datos. Utilice el modelo de Kevin para hallar el instante en que la roca llega al suelo.
- c)
 - i) Utilizando papel milimetrado, sitúe los datos de la tabla usando una escala de 1 cm para 1 segundo y 1 cm para 10 m.
 - ii) Comparando los gráficos de f y g con los datos representados, explique cuál de las dos funciones constituye el mejor modelo para la altura de la roca que cae.

① a) $f(x) = x^2 - 6x + 14 = x^2 - 6x + 9 - 9 + 14 = (x-3)^2 + 5$

b) $V(3, 5)$.

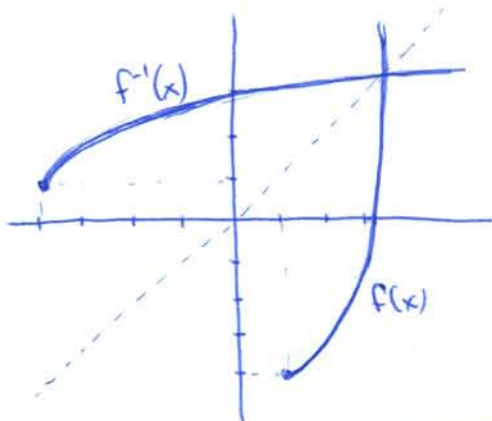
② a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$; $x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$; $f(1) = 1 - 2 - 3 = -4 \Rightarrow V(1, -4)$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 3 \rightarrow (3, 0) \\ -1 \rightarrow (-1, 0) \end{cases}$; corta eje OY en $(0, -3)$



b) Para que exista $f^{-1}(x)$, $f(x)$ debe ser inyectiva, luego el dominio lo debemos restringir a una sola rama de la parábola, por ej: $\text{Dom}(f) = [1, +\infty)$.

Gráfica de $f(x)$, con $x \in [1, +\infty)$, y gráfica de $f^{-1}(x)$:



c) $f(x) = x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = (x-1)^2 - 4$

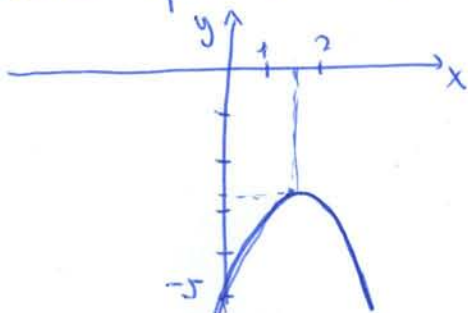
$y = (x-1)^2 - 4 \Rightarrow x = (y-1)^2 - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow (y-1)^2 = x+4 \Rightarrow y-1 = \sqrt{x+4} \Rightarrow y = 1 + \sqrt{x+4}$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} + 1$.

③ a) $f(x) = -x^2 + 3x - 5$; Vértice: $V(\frac{3}{2}, -\frac{11}{4})$; Eje: $x = \frac{3}{2}$

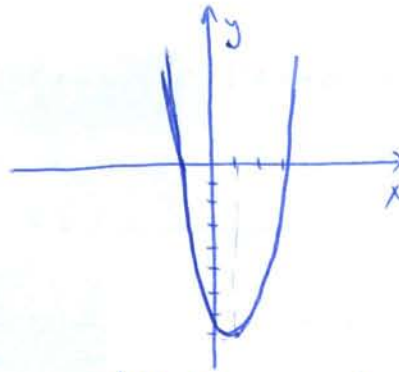
Corta eje OY : $(0, -5)$; Corta eje OX : no corta.



b) $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$

Vértice: $V(1, -8)$; eje: $x=1$; corte eje OX $\begin{cases} (3,0) \\ (-1,0) \end{cases}$

corte eje OY : $(0, -6)$



c) $f(x) = 2(x+1)(x-3)$; corte eje OX : $\begin{cases} (3,0) \\ (-1,0) \end{cases}$; corte eje OY : $(0, -6)$

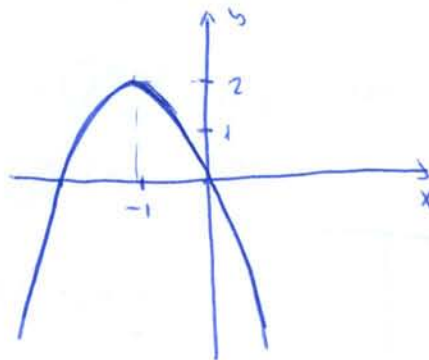
$V(1, -8)$; eje $x=1$

La gráfica es la misma que en b)

d) $f(x) = -2x(x+2)$

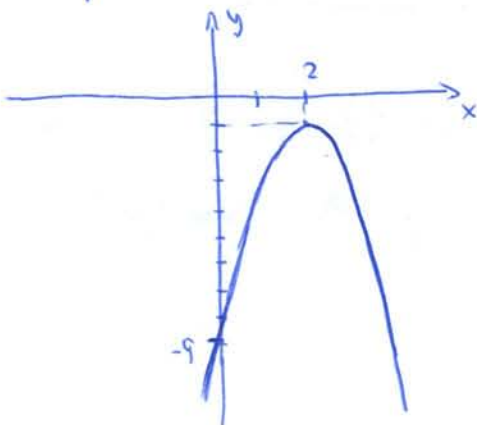
Vértice: $V(-1, 2)$; eje: $x=-1$; corte eje OX : $(0,0)$; $(-2,0)$.

Corte eje OY : $(0,0)$



e) $f(x) = -2(x-2)^2 - 1$; $V(2, -1)$; eje: $x=2$

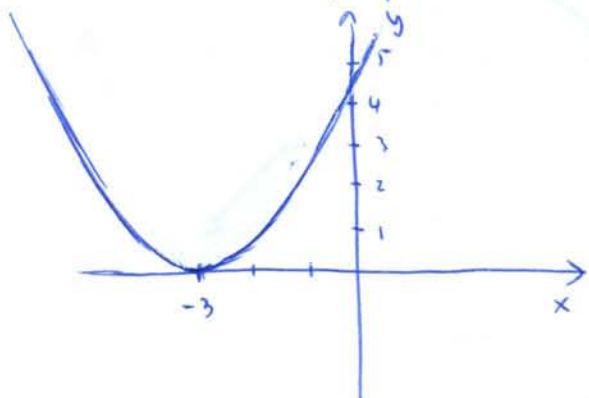
Corte eje OX : no corta; corte eje OY : $(0, -9)$



$$f) f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 \rightarrow \text{Corte eje } OX: (-3, 0)$$

$$\text{Corte eje } OY: (0, \frac{9}{2})$$

$$V(-3, 0); \text{ eje: } x = -3$$



(Comprobar las gráficas con la GDC).

$$④ a) y = a(x-1)(x-2)$$

$$f(0)=4 \rightarrow a(-1) \cdot (-2) = 4 \rightarrow a=2 \rightarrow f(x) = 2(x-1)(x-2)$$

b) Por simetría, el segundo pto. de corte con el eje OX será (2, 0), luego: $y = a(x+4)(x-2)$; $f(0)=4 \rightarrow a \cdot 4 \cdot (-2) = 4 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x+4)(x-2)$$

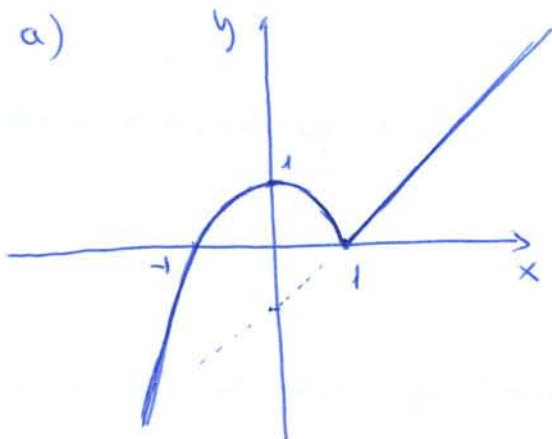
$$c) y = a(x-3)^2 - 2; f(0)=16 \rightarrow 9a - 2 = 16 \rightarrow a = 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow f(x) = 2(x-3)^2 - 2$$

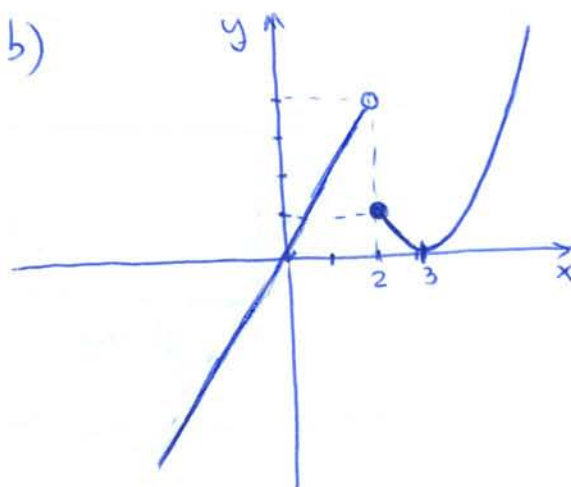
$$d) y = a(x-3)^2 + 8; \text{ pasa por } (1, 0) \rightarrow 4a + 8 = 0 \rightarrow a = -2$$

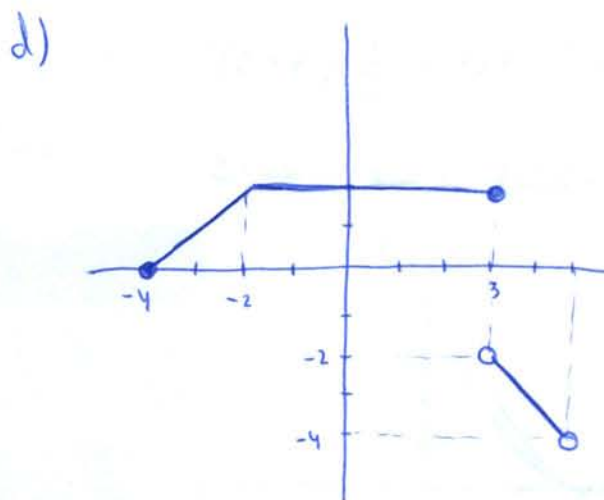
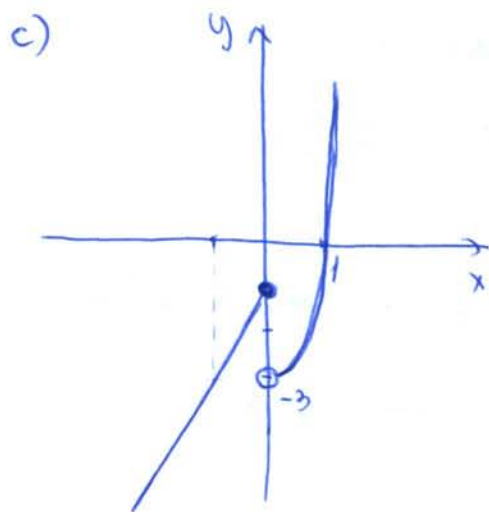
$$\rightarrow f(x) = -2(x-3)^2 + 8$$

$$⑤ a)$$



$$b)$$

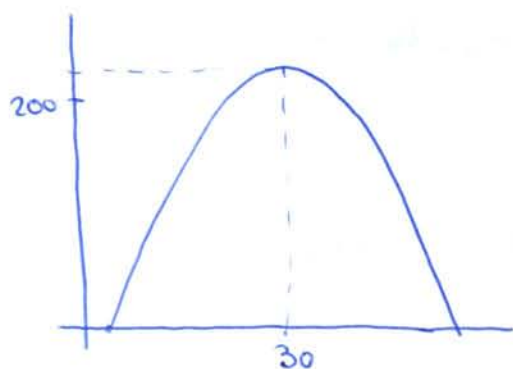




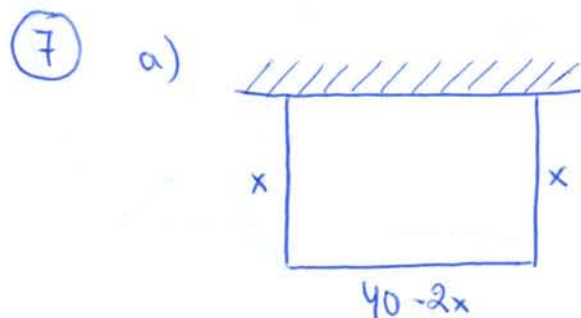
⑥ a) $P(0) = -30$ (pierde 30 €)
 $P(10) = 105$ €

b) $P(x) = 57 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 16x - 30 = 57 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 16x - 87 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = \begin{cases} 58 \\ 6 \end{cases}$ 58 pasteles o 6 pasteles.

c) Es una función cuadrática, de gráfica:



El máximo se encuentra en el vértice de la parábola: $V(32, 226)$
 luego, debe fabricar 32 pasteles, y obtendrá un beneficio máximo de 226 €



$$A(x) = x(40 - 2x) = 40x - 2x^2$$

b) El máximo de la parábola está en el vértice:

$$x = \frac{-40}{2 \cdot (-2)} = 10 ; f(10) = 400 - 200 - 200 \rightarrow V(10, 200)$$

x debe valer 10 m; el área máxima será 200 m².

8) a) $y = a(x-h)^2 + k$; vértice: P(-1, 2)

luego: $h = -1$; $k = 2 \rightarrow y = a(x+1)^2 + 2$

b) Pasa por (1, 0): $a \cdot 4 + 2 = 0 \rightarrow a = -\frac{1}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 2$.

9) a) $f(x) = x^2 + bx + c = (x-2)(x-3) = x^2 - 2x - 3x + 6 = x^2 - 5x + 6$

$\Rightarrow b = -5$; $c = 6$

b) $g(x) = a(x-h)^2 + 3 = a(x-2)^2 + 3 \Rightarrow h = 2$

$g(0) = 5 \rightarrow 4a + 3 = 5 \rightarrow a = \frac{1}{2}$.

10) a) $q = -2$; $r = 4$; b) $\frac{-2+4}{2} = 1 \rightarrow x = 1$ es el eje de simetría

c) Pasa por (0, -4): $-4 = p \cdot (0+2)(0-4) \rightarrow -4 = -8p \rightarrow p = \frac{1}{2}$

11) a) $f(x) = -10(x+4)(x-6)$

b) $\frac{-4+6}{2} = 1$; $f(1) = -10(1+4)(1-6) = -10 \cdot 5 \cdot (-5) = 250 \Rightarrow V(1, 250)$

$\Rightarrow f(x) = -10(x-1)^2 + 250$

c) $f(x) = -10(x-1)^2 + 250 = -10(x^2 - 2x + 1) + 250 = -10x^2 + 20x + 240$

12) a) $f(x) = a(x+3)(x-1) \rightarrow p = -3$; $q = 1$

$f(0) = 12 \rightarrow a \cdot 3 \cdot (-1) = 12 \rightarrow -3a = 12 \rightarrow a = -4$

$$b) \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1 ; \text{ eje de simetría : } x = -1.$$

$$c) f(-1) = -4(-1+3)(-1-1) = -4 \cdot 2 \cdot (-2) = 16 \rightarrow V(-1, 16)$$

luego el mayor valor de f es 16.

$$d) f(x) = -4(x+1)^2 + 16 \rightarrow h = -1; k = 16.$$

_____ o _____

(13) a) Como la parábola tiene su vértice en el eje de las x , debe ser $b^2 - 4ac = 0 \rightarrow q^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25 = 0 \rightarrow q^2 = 400 \rightarrow q = \pm 20$.

$$b) \text{ Para } q = 20 \rightarrow 4x^2 - 20x + 25 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$c) 4x^2 - 20x + 25 = 4x^2 + 20x + 25 \rightarrow 40x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$f(0) = 25 \rightarrow (0, 25).$$

_____ o _____

$$(14) a) f(t) = -0.25t^3 - 2.32t^2 + 1.93t + 106$$

$$i) \text{ Cuando } t = 0 \Rightarrow f(0) = 106 \text{ m.}$$

$$ii) f(4.5) = -0.25 \cdot (4.5)^3 - 2.32 \cdot (4.5)^2 + 1.93 \cdot 4.5 + 106 = 44.9 \text{ m.}$$

(Se puede dibujar la gráfica de $f(t)$ con la GDC (menu Graph), y usar la opción Y-calc, con $X = 4.5$).

$$iii) f(t) = 30 \rightarrow t = 4.91 \text{ s (con la opción X-calc, e } Y = 30, \text{ en la GDC).}$$

$$b) g(t) = -5.2t^2 + 9.5t + 100 \rightarrow g(t) = 0 \rightarrow t = 5.39 \text{ s.}$$

c) Ver archivo pdf: en rojo la gráfica de $f(t)$ y en verde la de $g(t)$; los puntos de la tabla en azul.

Se observa que $f(t)$ es mejor modelo, pues se ajusta mejor a los puntos.

_____ o _____