

Funciones reales de variable real

1	Determina gráficamente el dominio y recorrido de cada una de las siguientes funciones: a) $f(x) = \sqrt{x}$ b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ c) $f(x) = \sqrt{4-x}$ d) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ d) $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ e) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$
2	Siendo $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, halla simplificando al máximo: a) $f(x+4)$ b) $f(2-x)$ c) $f(-x)$ d) $f(x^2)$
3	Dada la función $g(x) = \frac{2x-3}{x-4}$: a) Halla su dominio y recorrido algebraicamente. b) Halla x si $g(x) = -3$.
4	Halla a y b en $f(x) = ax + \frac{b}{x}$, siendo $f(1) = 1$ y $f(2) = 5$.
5	Dada la función $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $x \in [0, 10]$: a) ¿Cuál es su dominio? b) Halla $f(0)$ y $f(10)$. c) Halla el valor del dominio que tiene 5 por imagen.
6	Dada la función $f(x) = \frac{x+10}{x-8}$, $x \geq 0$, halla el valor de a tal que $f(a) = a$.
7	Un cilindro tiene por radio de la base x, siendo su altura el doble del radio de la base. Calcula la fórmula de la función que relaciona el radio de la base x con: a) El volumen del cilindro. b) La superficie total del cilindro. ¿Cuál es el dominio en cada caso?
8	Expresa el área y de un triángulo equilátero en función de la medida x de un lado.
9	Halla el dominio de las siguientes funciones (analíticamente): a) $f(x) = x^5 - 6x$ b) $f(x) = \sqrt{4x-8}$ c) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2-4}}$ d) $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$ e) $f(x) = \frac{2}{5x-x^2}$

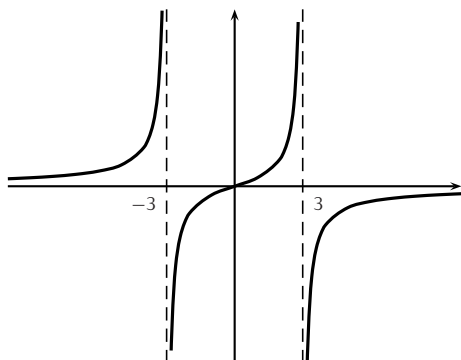
10

Halla el dominio de las funciones:

$$a) f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ \frac{x^2-2}{x-5} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

$$b) g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2-1} & \text{si } x < 1 \\ \frac{3x+5}{4} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x^2-4} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

11

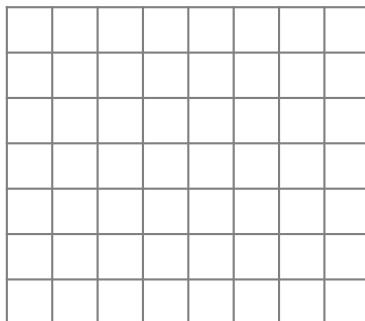
Sea f la función cuya gráfica es la siguiente:

- Halla el dominio y recorrido.
- ¿Existe $f(-3)$?
- ¿Es periódica?
- ¿Tiene algún tipo de simetría?
- ¿Tiene alguna asíntota?
- Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos y absolutos.

12

La función f está definida por $f(x) = \frac{3}{\sqrt{9-x^2}}$.

- Halla el dominio de f .
- Dibuja aproximadamente la gráfica de f en la cuadrícula provista a continuación.



- Escribe la ecuación de cada asíntota vertical.
- Escribe el recorrido de la función f .

13

Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2+2}$, y determina:

- Dominio y recorrido.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Máximos y mínimos.
- Simetrías.
- Asíntotas.

14	Estudia analíticamente si las siguientes funciones tienen algún tipo de simetría: a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$ b) $f(x) = x x$ c) $f(x) = x^3$ d) $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$ e) $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ f) $f(x) = \frac{x^4}{1+x^2}$ g) $f(x) = \sqrt[3]{x^3+1}$ h) $f(x) = \sqrt[5]{x^5+x^3}$
15	Las funciones f y g quedan definidas por $f : x \mapsto 3x$, $g : x \mapsto x + 2$. a) Halla una expresión para $(f \circ g)(x)$. b) Comprueba que $f^{-1}(18) + g^{-1}(18) = 22$.
16	Considera las funciones $f(x) = 2x$ y $g(x) = \frac{1}{x-3}$, $x \neq 3$. a) Calcula $(f \circ g)(4)$. b) Halla $g^{-1}(x)$. c) Escribe el dominio de g^{-1}.
17	Halla la inversa de las funciones: a) $f(x) = \frac{2}{x-1}$ b) $f(x) = \frac{x+1}{2}$ c) $f(x) = \frac{2x-3}{x}$ d) $f(x) = \frac{2x^3-5}{x^3}$ e) $f(x) = \frac{3x+4}{2x-3}$
18	Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 3x - 1$ y $h(x) = x^2$, ¿cómo debemos componerlas para obtener cada una de las siguientes? a) $y = \sqrt{3x-1}$ b) $y = 3\sqrt{x} - 1$ c) $y = 3x^2 - 1$ d) $y = (3x-1)^2$
19	a) Escribe la expresión $x^2 + 6x + 2$ en la forma $(x+a)^2 + b$, donde a y b son constantes a determinar. b) Dado que $(f \circ g)(x) = x^2 + 6x + 2$ y $g(x) = x + 3$, determina $f(x)$.
20	Dos funciones f, g se definen como sigue: $f : x \mapsto 3x + 5$ $g : x \mapsto 2(1-x)$ Halle: a) $f^{-1}(2)$; b) $(g \circ f)(-4)$.
21	La función f se define por $f : x \mapsto \sqrt{3-2x}, \quad x \leq \frac{3}{2}$ Calcule $f^{-1}(5)$.

22

Sean $f(x) = 2^x$, y $g(x) = \frac{x}{x-2}$, ($x \neq 2$). Halle:

a) $(g \circ f)(3)$

b) $g^{-1}(5)$

23

Sean $f(x) = \frac{8}{x}$ y $g(x) = x^2$.

a) Halle $f^{-1}(x)$.

b) i) Escriba $(f^{-1} \circ g)(x)$.

ii) Resuelva la ecuación $(f^{-1} \circ g)(x) = x$.

24

Sean $f(x) = 4x - 2$ y $g(x) = -2x^2 + 8$.

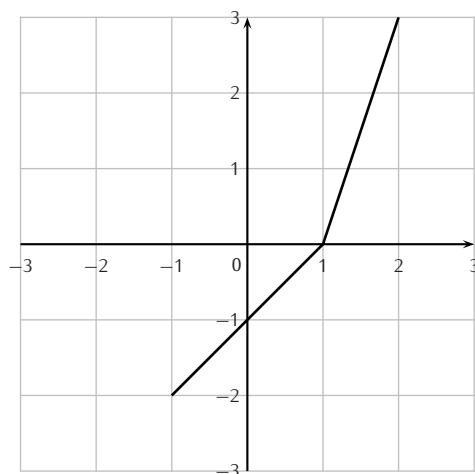
a) Halle $f^{-1}(x)$.

b) Halle $(f \circ g)(1)$.



25

La figura que aparece a continuación muestra la gráfica de un función f , para $-1 \leq x \leq 2$.



a) Escriba el valor de

i) $f(2)$;

ii) $f^{-1}(-1)$.

b) Dibuje aproximadamente la gráfica de f^{-1} en la cuadrícula dada.



26

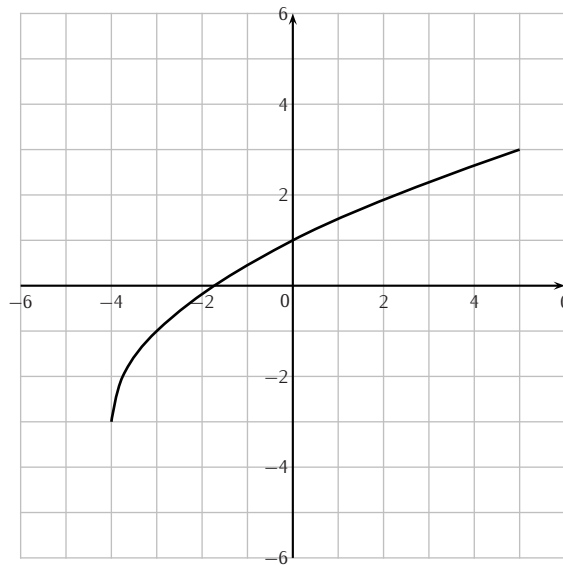
Sean $f(x) = kx^2 + kx$ y $g(x) = x - 0,8$. Los gráficos de f y g se cortan en dos puntos distintos. Halle los posibles valores de k .



27



La siguiente figura muestra el gráfico de $y = f(x)$, para $-4 \leq x \leq 5$.



- a) Escriba el valor de
- i) $f(-3)$;
 - ii) $f^{-1}(1)$.
- b) Halle el dominio de f^{-1}
- c) En la cuadrícula anterior, dibuje aproximadamente el gráfico de f^{-1} .

- ① a) $\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$; $\text{Rec}(f) = [0, +\infty)$
 b) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$; $\text{Rec}(f) = (0, +\infty)$
 c) $\text{Dom}(f) = (-\infty, 4]$; $\text{Rec}(f) = [0, +\infty)$
 d) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$; $\text{Rec}(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
 e) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$; $\text{Rec}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
 f) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$; $\text{Rec}(f) = [2, +\infty)$
-

- ② a) $f(x+4) = 2(x+4)^2 + 3(x+4) - 1 = 2x^2 + 19x + 43$
 b) $f(2-x) = 2(2-x)^2 + 3(2-x) - 1 = 2x^2 - 11x + 13$
 c) $f(-x) = 2(-x)^2 + 3(-x) - 1 = 2x^2 - 3x - 1$
 d) $f(x^2) = 2(x^2)^2 + 3x^2 - 1 = 2x^4 + 3x^2 - 1$
-

- ③ a) $x-4=0 \Rightarrow x=4$; $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{4\}$
 $y = \frac{2x-3}{x-4} \Rightarrow xy - 4y = 2x - 3 \Rightarrow xy - 2x = 4y - 3 \Rightarrow x(y-2) = 4y - 3$
 $\Rightarrow x = \frac{4y-3}{y-2} \Rightarrow y-2=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow \text{Rec}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

b) $g(x) = -3 \Rightarrow \frac{2x-3}{x-4} = -3 \Rightarrow 2x-3 = -3x+12 \Rightarrow 5x=15 \Rightarrow \boxed{x=3}$

④ $f(1)=1 \rightarrow a+b=1$
 $f(2)=5 \rightarrow 2a+\frac{b}{2}=5$

$$\left\{ \begin{array}{l} a+b=1 \\ 4a+b=10 \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} a+b=1 \\ \underline{4a+b=10} \\ 3a=9 \end{array} \rightarrow \boxed{a=3}$$

$$b=1-a \rightarrow \boxed{b=-2}$$

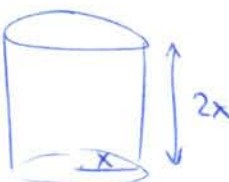
⑤ a) $\text{Dom}(f) = [0, 10]$

b) $f(0) = 0$; $f(10) = \frac{10}{11}$

c) $\frac{x}{x+1} = 5 \rightarrow x = 5x + 5 \rightarrow -4x = 5 \rightarrow \boxed{x = -\frac{5}{4}}$

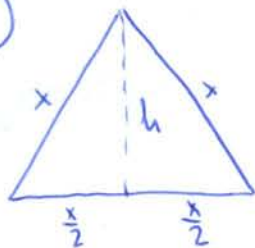
⑥ $\frac{a+10}{a-8} = a \rightarrow a+10 = a^2 - 8a \rightarrow a^2 - 9a - 10 = 0 \rightarrow a = \begin{cases} 10 \\ -1 \notin \text{Dom}(f) \end{cases}$

luego: $\boxed{a = 10}$

⑦ a)  $V = \pi r^2 h \rightarrow V(x) = \pi x^2 \cdot 2x \rightarrow V(x) = 2\pi x^3$
 $\text{Dom}(V) = (0, +\infty)$

b) $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h \rightarrow S(x) = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot 2x = 6\pi x^2$

$\text{Dom}(S) = (0, +\infty)$

⑧  $h = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$
 $A(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$

⑨ a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

b) $4x - 8 \geq 0 \rightarrow x \geq 2 \rightarrow \text{Dom}(f) = [2, +\infty)$

c) $x^2 - 4 > 0 \rightarrow (x-2)(x+2) > 0 \rightarrow \text{Dom}(f) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

d) $x^3 + 1 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{-1} = -1 \rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

e) $5x - x^2 = 0 \rightarrow x(5-x) = 0 \rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ x=5 \end{matrix} \rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0, 5\}$

10) a) $f_1(x) = x+1$; $\text{Dom}(f_1) = (-\infty, 0)$
 $f_2(x) = \sqrt{x}$; $\text{Dom}(f_2) = (0, 4]$
 $f_3(x) = \frac{x^2-2}{x-5}$; $\text{Dom}(f_3) = (4, 5) \cup (5, +\infty)$ } $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0, 5\}$

b) $g_1(x) = \frac{1}{x^2-1}$; $\text{Dom}(g_1) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
 $g_2(x) = \frac{3x+5}{4}$; $\text{Dom}(g_2) = [1, 2]$
 $g_3(x) = \sqrt{x^2-4}$; $\text{Dom}(g_3) = [2, +\infty)$ } $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

11) a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$; $\text{Rec}(f) = \mathbb{R}$.

b) $\nexists f(-3)$ ya que $-3 \notin \text{Dom}(f)$.

c) No es periódica; d) Simetría impar.

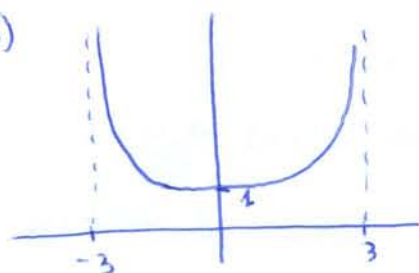
e) A.V: $x=3$; $x=-3$; A.H.: $y=0$

f) Estrictamente creciente en todo su dominio; no tiene máx. ni mín. relativos ni absolutos.

12) a) $\text{Dom}(f) = (-3, 3)$

c) $x=3$; $x=-3$

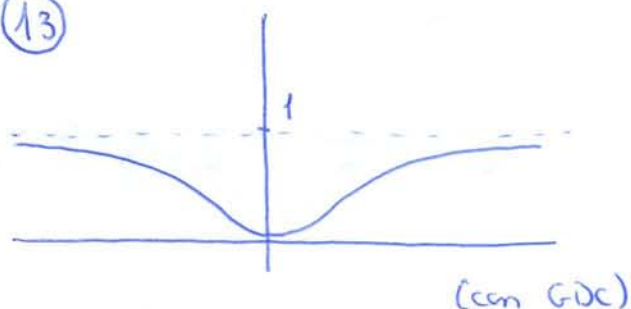
b)



(con GDC)

d) $\text{Rec}(f) = [1, +\infty)$

13)



a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$\text{Rec}(f) = [0, 1)$

b) Decreciente en $(-\infty, 0)$

Creciente en $(0, +\infty)$

c) Min. absoluto y relativo en $(0,0)$. No hay máx. absolutos ni relativos.

d) Simetría par ; e) A.H: $y=1$.

14) a) $f(-x) = (-x)^2 - 6(-x) + 8 = x^2 + 6x + 8$ No tiene.

b) $f(-x) = (-x) \cdot |-x| = -x \cdot |x| = -f(x)$ Impar.

c) $f(-x) = |(-x)^3| = |-x^3| = |x^3| = f(x)$ Par.

d) $f(-x) = \frac{(-x)^3}{1-(-x)^2} = \frac{-x^3}{1-x^2} = -f(x)$ Impar.

e) $f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)-2} = \frac{x^2}{-x-2}$ No tiene.

f) $f(-x) = \frac{(-x)^4}{1+(-x)^2} = \frac{x^4}{1+x^2} = f(x)$ Par.

g) $f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^3+1} = \sqrt[3]{-x^3+1}$ No tiene.

h) $f(-x) = \sqrt[5]{(-x)^5+(-x)^3} = \sqrt[5]{-x^5-x^3} = \sqrt[5]{(-1) \cdot (x^5+x^3)} = -\sqrt[5]{x^5+x^3} = -f(x)$ Impar.

15) a) $f(g(x)) = f(x+2) = 3(x+2) = 3x+6$

b) $f^{-1}(18) = a \Rightarrow f(a) = 18 \Rightarrow 3a = 18 \Rightarrow a = 6$
 $g^{-1}(18) = b \Rightarrow g(b) = 18 \Rightarrow b+2 = 18 \Rightarrow b = 16$ } $a+b = 22$

16) a) $f(g(4)) = f\left(\frac{1}{4-3}\right) = f(1) = 2 \cdot 1 = 2$

b) $y = \frac{1}{x-3} \Rightarrow x = \frac{1}{y-3} \Rightarrow y-3 = \frac{1}{x} \Rightarrow y = \frac{1}{x} + 3 = g^{-1}(x)$

c) $\text{Dom}(g^{-1}) = \mathbb{R} - \{0\}$

(3)

$$(17) a) y = \frac{2}{x-1} \rightarrow x = \frac{2}{y-1} \rightarrow y-1 = \frac{2}{x} \rightarrow y = 1 + \frac{2}{x} = f^{-1}(x)$$

$$b) y = \frac{x+1}{2} \rightarrow x = \frac{y+1}{2} \rightarrow y+1 = 2x \rightarrow y = 2x-1 = f^{-1}(x)$$

$$c) y = \frac{2x-3}{x} \rightarrow x = \frac{2y-3}{y} \rightarrow xy = 2y-3 \rightarrow xy-2y = -3 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2y-xy = 3 \rightarrow y(2-x) = 3 \rightarrow y = \frac{3}{2-x} = f^{-1}(x)$$

$$d) y = \frac{2x^3-5}{x^3} \rightarrow x = \frac{2y^3-5}{y^3} \rightarrow xy^3 = 2y^3-5 \rightarrow 2y^3-xy^3 = 5$$

$$\rightarrow y^3(2-x) = 5 \rightarrow y^3 = \frac{5}{2-x} \rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{5}{2-x}} = f^{-1}(x)$$

$$e) y = \frac{3x+4}{2x-3} \rightarrow x = \frac{3y+4}{2y-3} \rightarrow 2yx-3x = 3y+4 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2xy-3y = 3x+4 \rightarrow y(2x-3) = 3x+4 \rightarrow y = \frac{3x+4}{2x-3} = f^{-1}(x)$$

$$(18) a) y = \sqrt{3x-1} = \sqrt{g(x)} = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

$$b) y = 3\sqrt{x} - 1 = 3f(x) - 1 = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

$$c) y = 3x^2 - 1 = 3h(x) - 1 = g(h(x)) = (g \circ h)(x)$$

$$d) y = (3x-1)^2 = [g(x)]^2 = h(g(x)) = (h \circ g)(x)$$

$$(19) a) x^2+6x+2 = x^2+6x+9-9+2 = (x+3)^2 - 7$$

$$b) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = x^2+6x+2 = f(x+3) \rightarrow$$

$$f(x+3) = (x+3)^2 - 7 \rightarrow f(x) = x^2 - 7$$

②0 a) $f^{-1}(2) = a \Rightarrow f(a) = 2 \Rightarrow 3a + 5 = 2 \Rightarrow 3a = -3 \Rightarrow a = -1$

b) $(g \circ f)(-4) = g(f(-4)) = g(-7) = 2(1+7) = 16.$

②1 $f^{-1}(5) = a \Rightarrow f(a) = 5 \Rightarrow \sqrt{3-2a} = 5 \Rightarrow 3-2a = 25 \Rightarrow 2a = -22 \Rightarrow a = -11$

②2 a) $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(2^3) = g(8) = \frac{8}{8-2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

b) $g^{-1}(5) = a \Rightarrow g(a) = 5 \Rightarrow \frac{a}{a-2} = 5 \Rightarrow a = 5a - 10 \Rightarrow -4a = -10 \Rightarrow a = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

②3 a) $y = \frac{8}{x} \rightarrow x = \frac{8}{y} \rightarrow y = \frac{8}{x} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{8}{x}$

b) i) $(f^{-1} \circ g)(x) = f^{-1}(g(x)) = f^{-1}(x^2) = \frac{8}{x^2}$

ii) $\frac{8}{x^2} = x \rightarrow 8 = x^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$

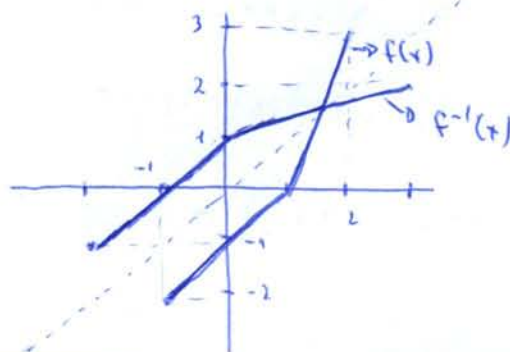
②4 a) $y = 4x - 2 \rightarrow x = \frac{y+2}{4} \rightarrow y = \frac{x+2}{4} = f^{-1}(x)$

b) $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(-2 \cdot 1^2 + 8) = f(6) = 4 \cdot 6 - 2 = 22$

②5 a) $f(2) = 3;$

$f^{-1}(-1) = 0;$

b)



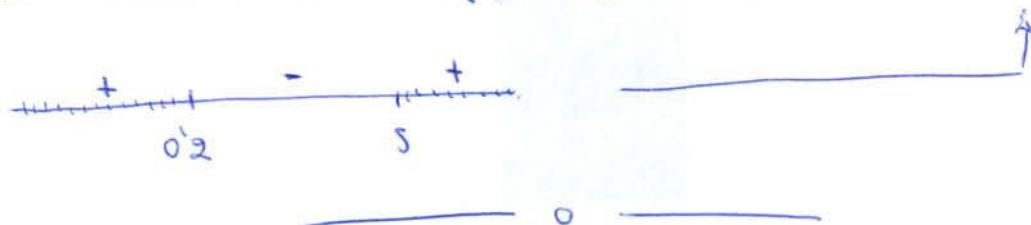
(4)

$$(26) \quad f(x) = g(x) \Rightarrow Kx^2 + Kx = x - 0'8 \Rightarrow Kx^2 + Kx - x + 0'8 = 0$$

$\Rightarrow Kx^2 + (K-1)x + 0'8 = 0 \Rightarrow$ la ec. cuadrática ha de tener dos soluciones distintas, luego $\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0$:

$$(K-1)^2 - 4 \cdot K \cdot 0'8 > 0 \Rightarrow K^2 - 2K + 1 - 3'2K > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K^2 - 5'2K + 1 > 0 \Rightarrow (-5)(K - 0'2) > 0 \Rightarrow K \in (-\infty, 0'2) \cup (5, +\infty)$$



$$(27) \quad a) \quad f(-3) = -1; \quad f^{-1}(1) = 0$$

$$b) \quad \text{Dom}(f^{-1}) = \text{Rec}(f) = [-3, 3]$$

c)

