

NOMBRE _____

- 1) ¿Es el vector $\vec{c} = (4, 1)$ combinación lineal de los vectores $\vec{a} = (-3, 1)$ y $\vec{b} = (2, 4)$? (1,5 puntos)
- 2) Dados los vectores $\vec{a} = (-3, 1)$ y $\vec{b} = (2, 4)$, se pide:
 - a) Calcular las coordenadas de: $-2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ y de $-2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ (1 punto)
 - b) Dibujar los vectores $-2\vec{a}$ y $\frac{1}{2}\vec{b}$ con origen común en un sistema de referencia.
Sumarlos y restarlos gráficamente. (1 punto)
- 3) Dar las coordenadas del vector que va desde $A(1, -2)$ hasta $B(3, 4)$. (1 punto)
- 4) Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1, -2)$ y $B(3, 4)$. (1 punto)
- 5) Hallar la ecuación de la recta paralela a $y = \frac{2x+1}{3}$ que pasa por el punto $(1, -2)$. (1 punto)
- 6) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a $y = \frac{2x+1}{3}$ que pasa por el punto $(1, -2)$. (1 punto)
- 7) Dibujar la siguiente función, calculando *eje*, *vértice* y *cortes con los ejes* de la parábola que constituye un trozo de la misma: (1,5 puntos)
$$f(x) = \begin{cases} -x-3 & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
- 8) Para la función anterior, a la vista de la gráfica, estudiar su dominio, continuidad, monotonía y curvatura. (1 punto)

SOLUCIONES

- 1) ¿Es el vector $\vec{c} = (4, 1)$ combinación lineal de los vectores $\vec{a} = (-3, 1)$ y $\vec{b} = (2, 4)$? (1,5 puntos)

Se trata de averiguar los *coeficientes* de la combinación lineal, si es que es posible encontrarlos (puede que no existan):

$$\begin{aligned} x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{c} &\Leftrightarrow x(-3, 1) + y(2, 4) = (4, 1) \Leftrightarrow (-3x, x) + (2y, 4y) = (4, 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (-3x + 2y, x + 4y) = (4, 1) \end{aligned}$$

Esto último es la igualdad entre dos vectores, puesto que cada miembro de la igualdad contiene las coordenadas de dichos vectores respecto de la base con la que estamos trabajando. Y como los dos vectores son el mismo (por eso hay un signo = entre ellos) y las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas, se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} -3x + 2y = 4 \\ x + 4y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3x + 2y = 4 \\ 3x + 12y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 14y = 7 \Rightarrow y = 7/14 = 1/2$$

Sustituyendo en la segunda ecuación: $x + 4 \cdot (1/2) = 1 \Rightarrow x + 2 = 1 \Rightarrow x = -1$.

Por tanto, hemos encontrado los coeficientes de la combinación lineal. Si el sistema de ecuaciones que hemos resuelto no hubiese tenido solución, $\vec{c}$ no sería combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Pero hemos encontrado que sí es combinación lineal, de coeficientes -1 y $1/2$.

- 2) Dados los vectores $\vec{a} = (-3, 1)$ y $\vec{b} = (2, 4)$, se pide:

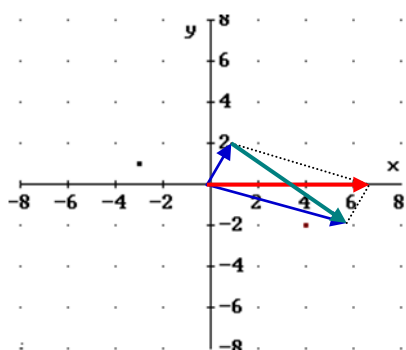
- a) Calcular las coordenadas de: $-2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ y de $-2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ (1 punto)

$$-2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = -2(-3, 1) + \frac{1}{2}(2, 4) = (6, -2) + (1, 2) = \boxed{(7, 0)}$$

$$-2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = -2(-3, 1) - \frac{1}{2}(2, 4) = (6, -2) - (1, 2) = \boxed{(5, -4)}$$

- b) Dibujar los vectores $-2\vec{a}$ y $\frac{1}{2}\vec{b}$ con origen común en un sistema de referencia.

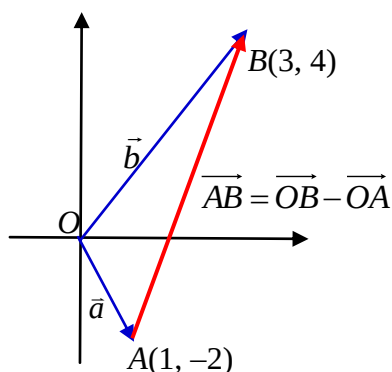
Sumarlos y restarlos gráficamente. (1 punto)



Llevamos a un sistema de referencia los vectores $-2\vec{a}$ y $\frac{1}{2}\vec{b}$, en azul ($-2\vec{a}$ es el que apunta hacia abajo). La suma es el vector rojo, obtenida por la *regla del paralelogramo*. Y la diferencia es el vector verde, que va desde el extremo del segundo vector al extremo del primer vector de la resta.

- 3) Dar las coordenadas del vector que va desde $A(1, -2)$ hasta $B(3, 4)$. (1 punto)

Si dibujamos los *vectores de posición* $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ y $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ de los puntos, veremos que el vector que une sus extremos $\overrightarrow{AB}$ es $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Por tanto:



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a} = (3, 4) - (1, -2) = \boxed{(2, 6)}$$

(Se puede recordar pensando en que, una vez colocados los vectores a restar con origen común, el *vector diferencia* es *extremo menos origen*, siendo el *extremo* el vector que va desde el origen común hasta el extremo del vector diferencia y el *origen* el que va desde el origen común hasta el origen del vector diferencia).

- 4) Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1, -2)$ y $B(3, 4)$. (1 punto)
La ecuación de la recta en *forma continua* nos proporciona un método fácil para resolver el problema. Siendo los puntos conocidos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) :

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \Rightarrow \frac{x - 1}{3 - 1} = \frac{y + 2}{4 + 2} \Rightarrow 6(x - 1) = 2(y + 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x - 6 = 2y + 4 \Rightarrow 6x - 6 - 4 = 2y \Rightarrow y = \frac{6x - 10}{2} \Rightarrow \boxed{y = 3x - 5}$$

- 5) Hallar la ecuación de la recta paralela a $y = \frac{2x+1}{3}$ que pasa por el punto $(1, -2)$.

(1 punto)

Como la recta dada se puede escribir como $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$, su pendiente es $m = \frac{2}{3}$.

Dos rectas son paralelas si, y sólo si tienen la misma pendiente. Luego de la recta que nos piden sabemos que debe tener como pendiente la antes indicada y que debe pasar por el punto que nos proporcionan en el enunciado. Usando la ecuación en *forma punto-pendiente*:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + 2 = \frac{2}{3}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} - 2 \Rightarrow \boxed{y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}}$$

- 6) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a $y = \frac{2x+1}{3}$ que pasa por el punto $(1, -2)$.

(1 punto)

Si la pendiente de la recta dada es $m = \frac{2}{3}$, la de una perpendicular será $m' = -\frac{1}{m} =$

$-\frac{1}{2/3} = -\frac{3}{2}$. Usando, nuevamente, *punto-pendiente*:

$$y + 2 = -\frac{3}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} - 2 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}$$

- 7) Dibujar la siguiente función, calculando *eje*, *vértice* y *cortes con los ejes* de la parábola que constituye un trozo de la misma: (1,5 puntos)

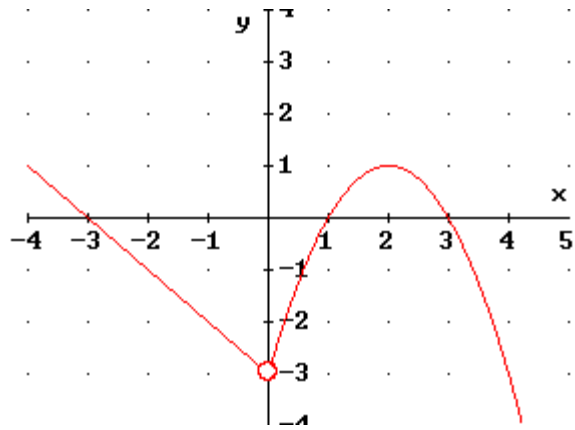
$$f(x) = \begin{cases} -x - 3 & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La función $y = -x - 3$ es una recta. Con una pequeña tabla de valores la dibujamos. Y la restringimos a la zona $x < 0$ (lado izquierdo del eje OY, sin tocarlo).

La función $y = -x^2 + 4x - 3$ es una parábola *cóncava*, puesto que el coeficiente de x^2 es negativo. Además:

- $x = 0 \Rightarrow y = -3$. Corta a OY en $(0, -3)$.
- $y = 0 \Rightarrow 0 = -x^2 + 4x - 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ ó $x = 3$. Corta a OX en $(1, 0)$ y $(3, 0)$.
- Eje: $x = -b / 2a \Rightarrow x = \frac{-4}{-2} \Rightarrow x = 2$.
- Vértice: $x = 2 \Rightarrow y = -4 + 8 - 3 = 1$: $(2, 1)$.

Con una pequeña tabla de valores adicional, obtenemos su gráfica, que restringimos a la zona $x > 0$, esto es, al lado derecho del eje OY sin tocarlo. Obtenemos así la función del gráfico adjunto. Observar que para $x = 0$ no hay imagen, lo que hemos destacado con un punto hueco.



8) Para la función anterior, a la vista de la gráfica, estudiar su dominio, continuidad, monotonía y curvatura. (1 punto)

- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, puesto que $x = 0$ no tiene imagen.
- Continuidad: Coincide con el dominio, porque $x = 0$ no tiene imagen.
- Monotonía: Decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Creciente en $(0, 2)$.
- Curvatura: Cóncava en $(0, +\infty)$. Cuando es una recta no es ni cóncava ni convexa.