



PAU (MAIORES DE 25 ANOS)
2023

Código: 42

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

PROBLEMAS: Hasta 2 puntos cada problema.

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Calcule las matrices $M = A \cdot B$ y $N = B \cdot A$
- Calcule la inversa de la matriz P siendo $P = (N - I)$, donde I representa a matriz identidad
- Resuelva el sistema $P \cdot X = C$

2. Dada la función $f(x) = x^3 + rx^2 - sx + t$, donde r, s, t son números reales, determine los valores de r, s, t para que $f(x)$ tenga un máximo en $x = -2$, un mínimo en $x = 0$ y pase por el punto $(1, -1)$

3. El 35 % de los estudiantes de un centro practica baloncesto. De los que practican baloncesto, el 70% practica además tenis. De los que no practican baloncesto, un cuarto practica tenis. Elegido al azar un estudiante de ese centro:

- ¿Cuál es la probabilidad de que practique ambos deportes?
- ¿Cuál es la probabilidad de que practique tenis?
- ¿Son independientes los sucesos “practicar baloncesto” y “practicar tenis”?

CUESTIONES: Se valora con 1 punto la respuesta correcta, 0 puntos si no se contesta y -0,5 si la respuesta es incorrecta.

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & m \\ 1 & m & 2 \end{pmatrix}$ los valores de m para los que A tiene inversa son

- $m = -2$
- $m \neq -2$ e $m \neq 1$
- cualquier valor de m

2. El $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2}{x^3 + x^2 + 1}$ vale

- 4
- 2
- 2

3. Si A y B son sucesos tales que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,5$ y $P(A \cap B) = 0,15$

- A y B son incompatibles
- A y B son independientes
- $P(A \cup B) = 0,75$

4. La derivada de la función $f(x) = (\ln x) / x$ es igual a

- $(1 - \ln x) / x^2$
- $1 / x^2$
- Ninguna de las anteriores

SOLUCIONES**PROBLEMAS: Hasta 2 puntos cada problema.**

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule las matrices $M = A \cdot B$ y $N = B \cdot A$ b) Calcule la inversa de la matriz P siendo $P = (N - I)$, donde I representa a matriz identidadc) Resuelva el sistema $P \cdot X = C$

a)

$$M = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (6 - 2 - 1) = (3)$$

$$1 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 1 \rightarrow 1 \times 1$$

$$N = B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3 \times \boxed{1 \cdot 1} \times 3 \rightarrow 3 \times 3$$

b) Calculamos la expresión de P .

$$P = (N - I) = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ -4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Comprobamos si tiene inversa.

$$|P| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -3 \\ -4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 30 + 12 + 12 - 18 - 24 - 10 = 54 - 52 = 2 \neq 0$$

Calculamos la inversa.

$$P^{-1} = \frac{Adj(P^T)}{|P|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -4 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & -3/2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

c) Despejamos X en la ecuación $P \cdot X = C$.

$$P \cdot X = C \Rightarrow X = P^{-1}C$$

Hallamos la expresión de X .

$$X = P^{-1}C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -4 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 16-6 \\ -16+8 \\ 8-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$3 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 1 \longrightarrow 3 \times 1$

2. Dada la función $f(x) = x^3 + rx^2 - sx + t$, donde r, s, t son números reales, determine los valores de r, s, t para que $f(x)$ tenga un máximo en $x = -2$, un mínimo en $x = 0$ y pase por el punto $(1, -1)$

Si $f(x)$ tiene un máximo en $x = -2$ se debe cumplir que $f'(-2) = 0$.

$$f(x) = x^3 + rx^2 - sx + t \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2rx - s$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 + 2rx - s \\ f'(-2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3(-2)^2 + 2r(-2) - s = 0 \Rightarrow 12 - 4r - s = 0$$

Si $f(x)$ tiene un mínimo en $x = 0$ se debe cumplir que $f'(0) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 + 2rx - s \\ f'(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3(0)^2 + 2r(0) - s = 0 \Rightarrow -s = 0 \Rightarrow \boxed{s = 0}$$

Sustituimos el valor de s obtenido en la primera ecuación.

$$\left. \begin{array}{l} 12 - 4r - s = 0 \\ s = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 12 - 4r = 0 \Rightarrow -4r = -12 \Rightarrow \boxed{r = \frac{12}{4} = 3}$$

La función queda con la expresión $f(x) = x^3 + 3x^2 + t$

Si $f(x)$ pasa por el punto $(1, -1)$ debe cumplirse que $f(1) = -1$.

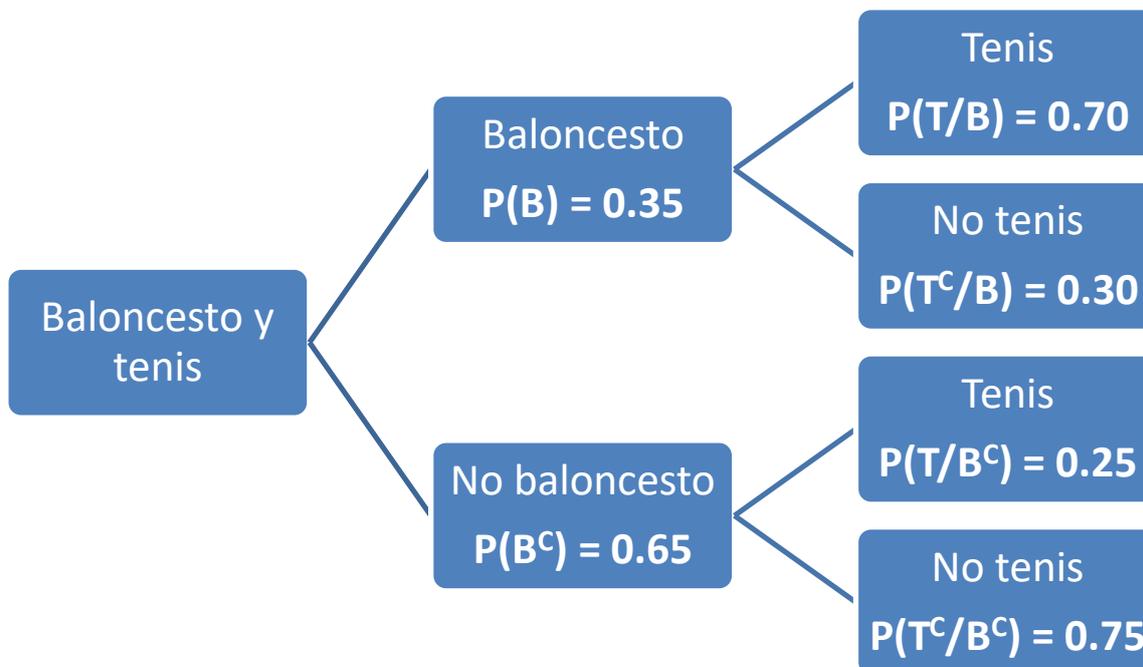
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 + 3x^2 + t \\ f(1) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + t \Rightarrow -1 = 4 + t \Rightarrow \boxed{t = -5}$$

Los valores buscados son $r = 3$, $s = 0$ y $t = -5$.

3. El 35 % de los estudiantes de un centro practica baloncesto. De los que practican baloncesto, el 70% practica además tenis. De los que no practican baloncesto, un cuarto practica tenis. Elegido al azar un estudiante de ese centro:

- ¿Cuál es la probabilidad de que practique ambos deportes?
- ¿Cuál es la probabilidad de que practique tenis?
- ¿Son independientes los sucesos “practicar baloncesto” y “practicar tenis”?

Realizamos un diagrama de árbol.



- Nos piden calcular $P(B \cap T)$.

$$P(B \cap T) = P(B)P(T / B) = 0.35 \cdot 0.70 = \boxed{0.245}$$

- Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(T) &= P(B \cap T) + P(B^c \cap T) = P(B)P(T / B) + P(B^c)P(T / B^c) = \\ &= 0.35 \cdot 0.70 + 0.65 \cdot 0.25 = \boxed{0.4075} \end{aligned}$$

- Para que sean independientes debe cumplirse $P(B \cap T) = P(B) \cdot P(T)$.

$$\left. \begin{aligned} P(B \cap T) &= 0.245 \\ P(B) \cdot P(T) &= 0.35 \cdot 0.4075 = 0.142625 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(B \cap T) = 0.245 \neq 0.142625 = P(B) \cdot P(T)$$

Los sucesos no son independientes.

CUESTIONES: Se valora con 1 punto la respuesta correcta, 0 puntos si no se contesta y -0,5 si la respuesta es incorrecta.

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & m \\ 1 & m & 2 \end{pmatrix}$ los valores de m para los que A tiene inversa son

- a) $m = -2$
- b) $m \neq -2$ e $m \neq 1$
- c) cualquier valor de m

Para que tenga inversa debe tener determinante no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & m \\ 1 & m & 2 \end{vmatrix} = 2 - m + 0 - 0 - 0 - m^2 = -m^2 - m + 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -m^2 - m + 2 = 0 \Rightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-1)(2)}}{-2} = \frac{1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} \frac{1+3}{-2} = -2 = m \\ \frac{1-3}{-2} = 1 = m \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa si $m \neq 1$ y $m \neq -2$. La respuesta correcta es b)

2. El $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2}{x^3 + x^2 + 1}$ vale

- a) 4
- b) -2
- c) 2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2}{x^3 + x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3}{x^3} = 4. \text{ La respuesta correcta es la a)}$$

3. Si A y B son sucesos tales que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,5$ y $P(A \cap B) = 0,15$

- a) A y B son incompatibles
- b) A y B son independientes
- c) $P(A \cup B) = 0,75$

Como $P(A \cap B) = 0,15 \neq 0$ los sucesos no son incompatibles. La respuesta a) es incorrecta.

Como $\left. \begin{array}{l} P(A) \cdot P(B) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2 \\ P(A \cap B) = 0,15 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B)$ los sucesos tampoco son

independientes. La respuesta b) es incorrecta.

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,5 - 0,15 = 0,75$. La respuesta c) es la correcta.

4. La derivada de la función $f(x) = (\ln x)/x$ es igual a

a) $(1 - \ln x)/x^2$

b) $1/x^2$

c) Ninguna de las anteriores

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

La respuesta correcta es la a).