

 UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	Prueba de Acceso a la Universidad para mayores de 25 años Curso Académico: 2022-2023 ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES TIEMPO DE REALIZACIÓN: 1 HORA
--	---

RESUELVE TRES de los siguientes **cuatro problemas** (todos ellos tienen el mismo peso en la nota final). Si se responde a los cuatro ejercicios, el alumno deberá indicar explícitamente los tres que desea que le sean tenidos en cuenta. En caso contrario, se eliminará el último de los ejercicios resueltos. Se pide explicar el razonamiento seguido para resolver cada ejercicio.

Problema 1. (3+4+3 puntos)

i) Clasifica el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 15 \\ 2x + 2y - z = 30 \\ x - 8y + 4z = 15 \end{cases}$$

ii) Calcula todas sus soluciones (si las tiene)

iii) Encuentra una solución que cumpla $z = 10$.

Problema 2. (2+5+3 puntos)

Consideramos la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

i) Indica su dominio y calcula los cortes con los ejes.

ii) Calcula máximos y mínimos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento.

iii) Con todo lo anterior, aproxima una representación de la función.

Problema 3. (5+5 puntos)

En una gran empresa, 7 de cada 10 empleados/as acude a trabajar en algún tipo de transporte y el resto andando. Llega puntual a trabajar el 60 % de los que utilizan el transporte y el 90 % de los que acude andando.

i) Calcula el porcentaje de personas de la empresa que llegan tarde a trabajar.

ii) Se elige una persona al azar. Sabiendo que llega puntual a trabajar, calcula la probabilidad de que vaya andando.

Problema 4. (3+1+3+3 puntos)

En una encuesta realizada por una empresa de salas de cine a 40 de sus visitantes, se ha preguntado el número de películas que han visto en el cine en el último mes. Las respuestas quedan recogidas en la siguiente tabla de frecuencias:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Número de películas
7	8	6	5	4	6	2	1	0	1	Frecuencia

Por ejemplo, la tabla indica que 7 personas dijeron que habían visto una película, 8 personas dijeron que habían visto 2 películas, etc. Calcular la media, la moda y la desviación típica. ¿Qué porcentaje de visitantes ha visto más de 5 películas?

SOLUCIONES**Problema 1. (3+4+3 puntos)**

i) Clasifica el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 15 \\ 2x + 2y - z = 30 \\ x - 8y + 4z = 15 \end{cases}$$

ii) Calcula todas sus soluciones (si las tiene)

iii) Encuentra una solución que cumpla $z = 10$.

i) Aplicamos el método de Gauss.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 15 \\ 2x + 2y - z = 30 \\ x - 8y + 4z = 15 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 2x + 2y - z = 30 \\ -2x + 4y - 2z = -30 \\ \hline 6y - 3z = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 1^a \\ x - 8y + 4z = 15 \\ -x + 2y - z = -15 \\ \hline -6y + 3z = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 15 \\ 6y - 3z = 0 \\ -6y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a + \text{Ecuación } 2^a \\ -6y + 3z = 0 \\ 6y - 3z = 0 \\ \hline 0 = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 15 \\ 6y - 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

El sistema triangular equivalente obtenido tiene dos ecuaciones y tres incógnitas. Es un sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).

ii) Resolvemos el sistema partiendo del sistema triangular.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 15 \\ 6y - 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 15 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 15 \\ 2y = z \end{cases} \Rightarrow x - 2y + 2y = 15 \Rightarrow \boxed{x = 15}$$

Las soluciones del sistema son $\left. \begin{array}{l} x = 15 \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{array} \right\}, \lambda \in \mathbb{R}.$

iii)

$$\begin{cases} x = 15 \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda = 10 \rightarrow \lambda = 5 \end{cases} \Rightarrow y = 5 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 15 \\ y = 5 \\ z = 10 \end{array}}$$

Problema 2. (2+5+3 puntos)

Consideramos la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

- Indica su dominio y calcula los cortes con los ejes.
- Calcula máximos y mínimos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Con todo lo anterior, aproxima una representación de la función.

i) Al ser una función polinómica su dominio es $\mathbb{R}$.

$$\text{Eje OY} \rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \boxed{P(0,0)}$$

$$\begin{aligned} \text{Eje OX} \rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \\ y = 0 \end{array} \right\} &\Rightarrow 0 = x^3 - 6x^2 + 9x \Rightarrow 0 = x(x^2 - 6x + 9) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow \boxed{P(0,0)} \\ x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(9)}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow \boxed{Q(3,0)} \end{cases} \end{aligned}$$

Los puntos de corte con los ejes son $P(0, 0)$ y $Q(3, 0)$.

ii) Estudiamos el signo de la derivada.

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} &\Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(3)}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 = x \\ \frac{4-2}{2} = 1 = x \end{cases} \end{aligned}$$

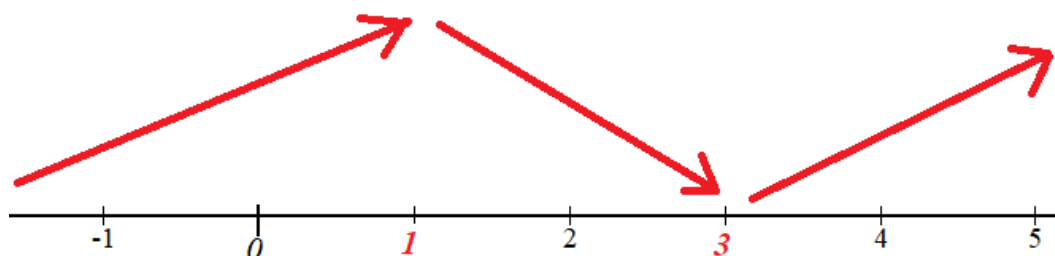
Analizamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 9 > 0$. La función crece en $(-\infty, 1)$.

En el intervalo $(1, 3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3 < 0$. La función decrece en $(1, 3)$.

En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9 > 0$. La función crece en $(3, +\infty)$.

La función sigue el esquema del dibujo.



La función presenta un máximo relativo en $x = 1$ y un mínimo relativo en $x = 3$.

La función crece en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $(1, 3)$.

iii) Realizamos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	$y = x^3 - 6x^2 + 9x$
0	0
1	4 Máximo
2	2
3	0 Mínimo
4	4



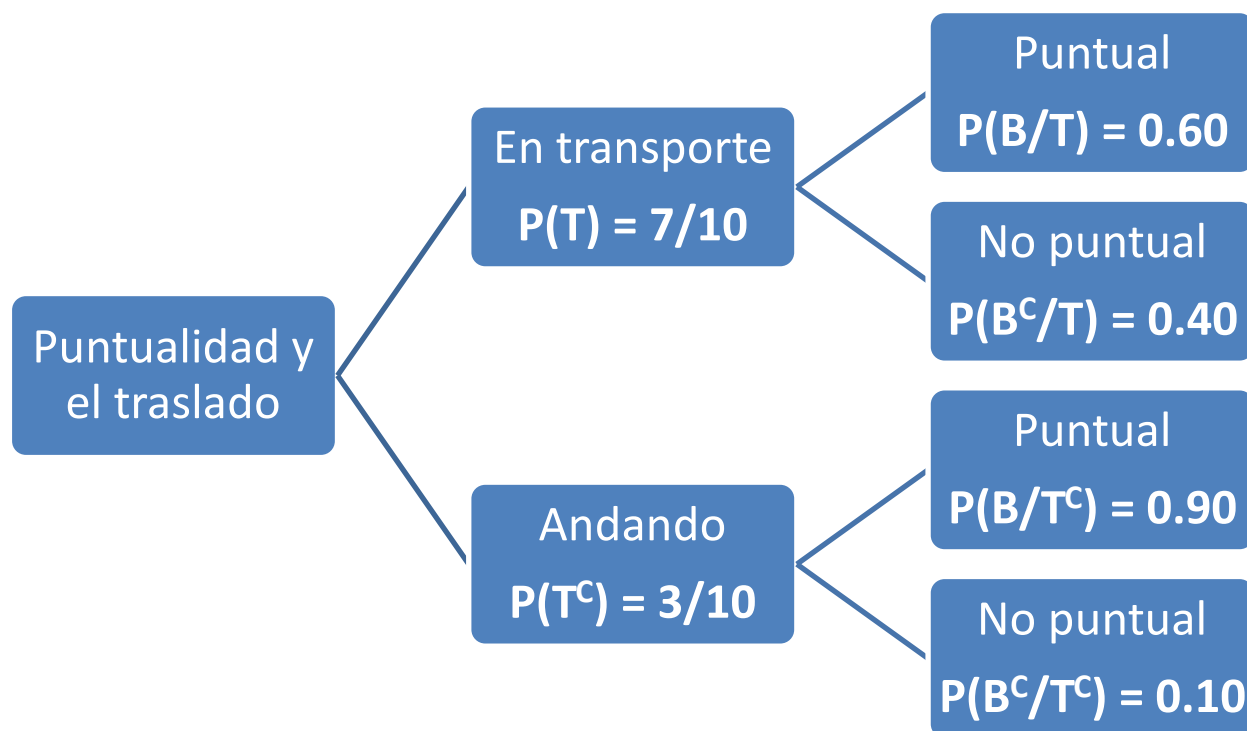
Problema 3. (5+5 puntos)

En una gran empresa, 7 de cada 10 empleados/as acude a trabajar en algún tipo de transporte y el resto andando. Llega puntual a trabajar el 60 % de los que utilizan el transporte y el 90 % de los que acude andando.

i) Calcula el porcentaje de personas de la empresa que llegan tarde a trabajar.

ii) Se elige una persona al azar. Sabiendo que llega puntual a trabajar, calcula la probabilidad de que vaya andando.

Llamamos T al suceso “Acudir a trabajar en transporte” y B al suceso “Llegar puntual (Bien) al trabajo”. Realizamos un diagrama de árbol



i) Nos piden la probabilidad de llegar tarde: $P(B^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(B^c) &= P(T \cap B^c) + P(T^c \cap B^c) = P(T)P(B^c/T) + P(T^c)P(B^c/T^c) = \\
 &= \frac{7}{10} \cdot 0.4 + \frac{3}{10} \cdot 0.1 = \boxed{0.31}
 \end{aligned}$$

El porcentaje de personas que llegan tarde a trabajar es del 31 %.

ii) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(T^c/B) = \frac{P(T^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(T^c)P(B/T^c)}{1 - P(B^c)} = \frac{\frac{3}{10} \cdot 0.9}{0.69} = \boxed{\frac{9}{23} \approx 0.391}$$

Problema 4. (3+1+3+3 puntos)

En una encuesta realizada por una empresa de salas de cine a 40 de sus visitantes, se ha preguntado el número de películas que han visto en el cine en el último mes. Las respuestas quedan recogidas en la siguiente tabla de frecuencias:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Número de películas
7	8	6	5	4	6	2	1	0	1	Frecuencia

Por ejemplo, la tabla indica que 7 personas dijeron que habían visto una película, 8 personas dijeron que habían visto 2 películas, etc. Calcular la media, la moda y la desviación típica. ¿Qué porcentaje de visitantes ha visto más de 5 películas?

La media: $\bar{x} = \frac{1 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 1 + 9 \cdot 0 + 10 \cdot 1}{40} = \frac{149}{40} = 3.725$ películas.

La moda es el número de películas vistas con mayor frecuencia $\rightarrow$ La moda es 2 películas, que han visto 8 personas.

La desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1^2 \cdot 7 + 2^2 \cdot 8 + 3^2 \cdot 6 + 4^2 \cdot 5 + 5^2 \cdot 4 + 6^2 \cdot 6 + 7^2 \cdot 2 + 8^2 \cdot 1 + 9^2 \cdot 0 + 10^2 \cdot 1}{40} - 3.725^2} = 1.6277 \text{ películas}$$

De las 40 personas 6 de ellas vieron 6 películas, 2 personas vieron 7 películas, 1 persona vió 8 películas y 1 persona vió 10 películas. Un total de $6 + 2 + 1 + 1 = 10$ personas vieron más de 5 películas. Esto hace un porcentaje de $\frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$ de los visitantes.