

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 62$$

Racionalizando los denominadores tenemos

$$\frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})}{(x - \sqrt{x^2 - 1})} \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})}{(x + \sqrt{x^2 - 1})} + \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})}{(x + \sqrt{x^2 - 1})} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})}{(x - \sqrt{x^2 - 1})} = 62$$

Binomios al cuadrado en el numerador:

$$(x + \sqrt{x^2 - 1})^2$$

$$(x - \sqrt{x^2 - 1})^2$$

Identidades notables en el denominador:

suma por diferencia, diferencia de cuadrados

$$x^2 - (x^2 - 1)$$

Así:

$$\frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^2}{x^2 - (x^2 - 1)} + \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^2}{x^2 - (x^2 - 1)} = 62$$

$$\frac{x^2 + x^2 - 1 + 2\sqrt{x^2 - 1}}{1} + \frac{x^2 + x^2 - 1 - 2\sqrt{x^2 - 1}}{1} = 62$$

$$x^2 + x^2 - 1 + 2\sqrt{x^2 - 1} + x^2 + x^2 - 1 - 2\sqrt{x^2 - 1} = 62$$

$$2x^2 - 1 + 2\sqrt{x^2 - 1} + 2x^2 - 1 - 2\sqrt{x^2 - 1} = 62$$

$$4x^2 - 1 - 1 = 62$$

$$4x^2 = 62 + 1 + 1 = 64$$

$$x^2 = \frac{64}{4} = 16$$

$$x^2 = \frac{64}{4} = 16$$

$$x = \sqrt{16} = \pm 4 \text{ es la solución buscada}$$

Comprobación

Sustituimos los valores de x en la ecuación:

para x=4

$$\frac{4 + \sqrt{4^2 - 1}}{4 - \sqrt{4^2 - 1}} + \frac{4 - \sqrt{4^2 - 1}}{4 + \sqrt{4^2 - 1}} = \frac{4 + \sqrt{16 - 1}}{4 - \sqrt{16 - 1}} + \frac{4 - \sqrt{16 - 1}}{4 + \sqrt{16 - 1}} = 62$$

$$\frac{4 + \sqrt{15}}{4 - \sqrt{15}} + \frac{4 - \sqrt{15}}{4 + \sqrt{15}} = 62$$

Racionalizando:

$$\frac{(4 + \sqrt{15})}{(4 - \sqrt{15})} \frac{(4 + \sqrt{15})}{(4 + \sqrt{15})} + \frac{(4 - \sqrt{15})}{(4 + \sqrt{15})} \frac{(4 - \sqrt{15})}{(4 - \sqrt{15})} = 62$$

$$\frac{(4 + \sqrt{15})^2}{(16 - 15)} + \frac{(4 - \sqrt{15})^2}{(16 - 15)} = 62$$

$$16 + 15 + 8\sqrt{15} + 16 + 15 - 8\sqrt{15} = 62$$

$$\mathbf{31 + 31 = 62}$$

para x=-4

$$\frac{-4 + \sqrt{-(4)^2 - 1}}{-4 - \sqrt{-(4)^2 - 1}} + \frac{-4 - \sqrt{-(4)^2 - 1}}{-4 + \sqrt{-(4)^2 - 1}} = \frac{-4 + \sqrt{16 - 1}}{-4 - \sqrt{16 - 1}} + \frac{-4 - \sqrt{16 - 1}}{-4 + \sqrt{16 - 1}} = 62$$

$$\frac{-4 + \sqrt{15}}{-4 - \sqrt{15}} + \frac{-4 - \sqrt{15}}{-4 + \sqrt{15}} = 62$$

Racionalizando:

$$\frac{(-4 + \sqrt{15})}{(-4 - \sqrt{15})} \frac{(-4 + \sqrt{15})}{(-4 + \sqrt{15})} + \frac{(-4 - \sqrt{15})}{(-4 + \sqrt{15})} \frac{(-4 - \sqrt{15})}{(-4 - \sqrt{15})} = 62$$

$$\frac{(-4 + \sqrt{15})^2}{(16 - 15)} + \frac{(-4 - \sqrt{15})^2}{(16 - 15)} = 62$$

$$16 + 15 - 8\sqrt{15} + 16 + 15 + 8\sqrt{15} = 62$$

$$\mathbf{31 + 31 = 62}$$

Resolver

$$\sqrt{\sqrt{x} + 3} - \sqrt{\sqrt{x} - 3} = \sqrt{2\sqrt{x}}$$

Para ello haremos el siguiente cambio de variable:

$\sqrt{x} = t$; *sustituyéndola en la ecuación original*

$$\sqrt{\sqrt{x} + 3} - \sqrt{\sqrt{x} - 3} = \sqrt{2\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{t + 3} - \sqrt{t - 3} = \sqrt{2t}$$

Elevando al cuadrado ambas términos:

$$(\sqrt{t + 3} - \sqrt{t - 3})^2 = (\sqrt{2t})^2$$

$$t + 3 + t - 3 - 2(\sqrt{t + 3}\sqrt{t - 3}) = 2t$$

$$\cancel{2t} - \cancel{2t} = 2(\sqrt{t + 3}\sqrt{t - 3})$$

$$0 = 2(\sqrt{t + 3}\sqrt{t - 3})$$

El segundo término es una identidad notable, ya que suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados

$$0 = 2(\sqrt{t^2 - 9})$$

$$(\sqrt{t^2 - 9}) = 0$$

Elevando al cuadrado:

$$(\sqrt{t^2 - 9})^2 = 0$$

$$t^2 - 9 = 0$$

$$t^2 = 9$$

Deshaciendo el cambio de variable inicial:

$$\sqrt{x} = t$$

$$\sqrt{x}^2 = t^2$$

$$x = t^2 = \mathbf{9}$$