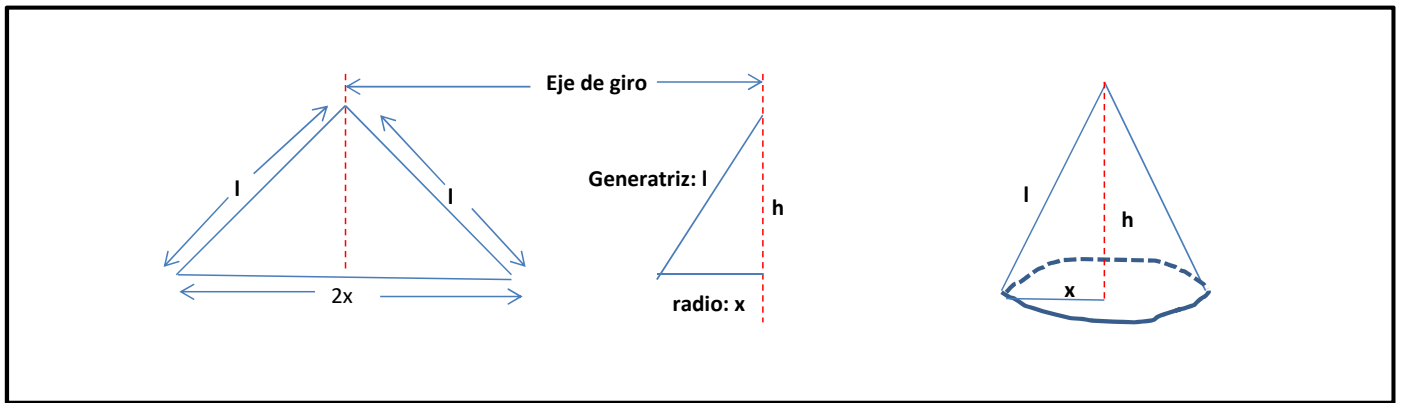


Un triángulo isósceles de perímetro 30 cm. Gira alrededor de su altura engendrando un cono. ¿Qué valor debe darse a la base del triángulo para que el volumen del cono sea máximo?

Solución



Triángulo isósceles: aquel que tiene dos lados de igual longitud.

Sean l la longitud de los dos lados iguales, y $2x$ la longitud de la base.

Sea h la altura y eje de giro que genera el cono; y " x " la mitad de la base, el radio

Sabemos que el perímetro es:

$$P_t = 2l + 2x$$

$$30 = 2l + 2x$$

Despejamos l :

$$2l = 30 - 2x$$

$$l = \frac{30 - 2x}{2} = 15 - x \text{ ecuación 1}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$h^2 = l^2 - x^2$$

Sustituimos el valor de " l " en función de " x ", de la ecuación 1:

$$h^2 = (15 - x)^2 - x^2$$

$$h^2 = 225 + x^2 - 30x - x^2$$

$$h^2 = 225 - 30x$$

$$h = \sqrt{225 - 30x}$$

Volumen del cono

$$V_c = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

En nuestro caso, el radio es igual a " x ". Así tenemos la altura en función del radio:

$$V_c = \frac{1}{3} \pi x^2 \sqrt{225 - 30x}$$

Como el enunciado nos pide hallar el valor de la base " $2x$ " para que el volumen del cono sea máximo, significa que:

$$V'_c = 0$$

Luego, calculamos la 1ª derivada de V_c : es la derivada de un producto:

$$V'_c = \frac{2x\pi}{3} \sqrt{225 - 30x} + \frac{1}{3} \pi x^2 \cdot \frac{(-30)}{2\sqrt{225 - 30x}} = \frac{2x\pi}{3} \sqrt{225 - 30x} + \frac{(-5\pi x^2)}{\sqrt{225 - 30x}}$$

Como hemos dicho antes, para que el volumen del cono sea máximo:

$$V'_c = 0$$

Luego

$$\frac{2x\pi}{3} \sqrt{225 - 30x} + \frac{(-5\pi x^2)}{\sqrt{225 - 30x}} = 0$$

$$\frac{2x\pi (\sqrt{225 - 30x}) \cdot (\sqrt{225 - 30x}) - 3 \cdot 5\pi x^2}{3\sqrt{225 - 30x}} = 0$$

$$2x\pi (\sqrt{225 - 30x}) \cdot (\sqrt{225 - 30x}) - 15\pi x^2 = 0 \cdot 3\sqrt{225 - 30x}$$

$$2x\pi (\sqrt{225 - 30x}) \cdot (\sqrt{225 - 30x}) - 15\pi x^2 = 0$$

$$2x\pi (\sqrt{225 - 30x}) \cdot (\sqrt{225 - 30x}) - 15\pi x^2 = 0$$

$$2x\pi (225 - 30x) - 15\pi x^2 = 0$$

Sacamos πx factor común:

$$x\pi [2 \cdot (225 - 30x) - 15x] = 0$$

Luego:

$$x\pi = 0$$

$$x = \frac{0}{\pi} = 0 \text{ solución no válida}$$

O

$$[2 \cdot (225 - 30x) - 15x] = 0$$

$$[450 - 60x - 15x] = 0$$

$$450 - 75x = 0$$

$$75x = 450$$

$$x = \frac{450}{75} = 6 \text{ cm solución válida}$$

La longitud de la base del triángulo isósceles será: $2x = 2 \cdot 6 = 12 \text{ cm}$