CÍRCULOS.

C1. Se considera un círculo de radio r. Probar que el rectángulo de área máxima inscrito en el círculo dado es un cuadrado. Considerando el círculo inscrito en dicho cuadrado, calcular el cociente entre las áreas de los dos círculos.

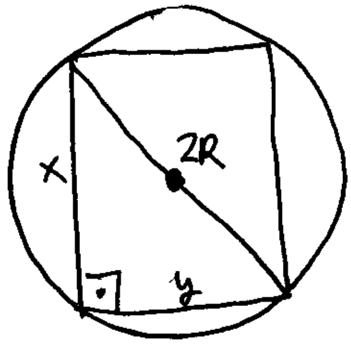
C2. En una circunferencia de radio R se traza la tangente en un punto cualquiera C y una cuerda AB paralela a dicha tangente. Obtenemos así un triángulo ABC, cuya área queremos que sea la mayor posible. Demuestra que, para ello, la distancia de C a la cuerda debe ser 3/2 del radio.

C3. En una semicircunferencia de diámetro AB = 2R se traza una cuerda CD paralela a AB.

a) ¿Cuál debe ser la longitud de esa cuerda para que el área del trapecio ABCD sea máxima?
b) Sea E el punto medio del arco CD y construyamos el pentágono ACEDB. Calcula la longitud de la cuerda CD para que el área del pentágono sea máxima.

C4. Inscribe en una circunferencia dada el cuadrilátero de mayor área que tenga dos lados paralelos, uno el doble de largo que el otro (Lewis Carroll)

C1 Observa la figura



La diagonal del rectángulo inscrito es el diámetro de la circunferencia.

- Variables: lados x, y ($x, y > 0$)
- Restricción: el triángulo formado por el diámetro de la circunferencia y los lados del rectángulo es recto → cumple el teorema de Pitágoras

$$x^2 + y^2 = (2R)^2 \iff \boxed{x^2 + y^2 = 4R^2}$$

- Función a optimizar. $f = x \cdot y$
- Se introduce la ligadura en la función: $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$

$$\Rightarrow f(x) = x \cdot \sqrt{4R^2 - x^2} = \sqrt{4R^2x^2 - x^4}$$

Recuerda que optimizar $\sqrt{f}$ equivale a optimizar f; trabajaremos con el radicando, que seguiremos llamando f.

$$f(x) = 4R^2x^2 - x^4.$$

- 1ª y 2ª derivada

$$f'(x) = 8R^2x - 4x^3 \qquad f''(x) = 8R^2 - 12x^2.$$

- Condición de extremo: $f' = 0 \to 8R^2x - 4x^3 = 0 \to x^2 = \frac{8R^2}{4} \to \boxed{x = R\sqrt{2}}$

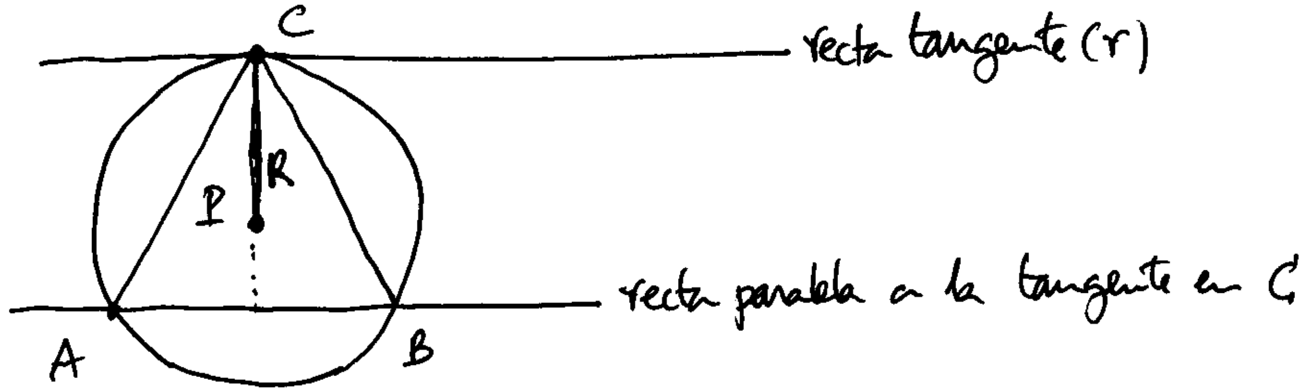
$$f''(R\sqrt{2}) = 8R^2 - 12(R\sqrt{2})^2 = 8R^2 - 24R^2 < 0 \to \text{máximo.}$$

- Solución:

$$x = R\sqrt{2} \to y = \sqrt{4R^2 - (R\sqrt{2})^2} = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = R\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{x = y} \Rightarrow$$

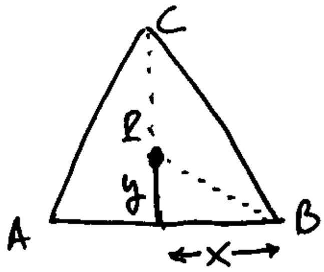
$\boxed{\text{Forma un CUADRADO}}$

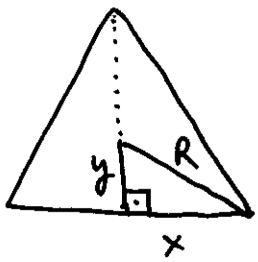
C2 Observa la figura



El triángulo $\widehat{ABC}$ es isósceles. La recta que pasa por C y P (centro de la circunferencia) es perpendicular a la recta r. (condición de tangencia).

- Variables: x, y $(x>0)$
- ligadura





Teorema de Pitágoras
$x^2+y^2=R^2$.

- Función a optimizar.

$$f=\frac{1}{2}2x\cdot(y+R) = x\cdot(y+R)$$

- Se introduce la ligadura en la función.

$$x=\sqrt{R^2-y^2} \longrightarrow \boxed{f(y)=(y+R)\cdot\sqrt{R^2-y^2}\,.}$$

- 1ª y 2ª derivada.

$$f'(y)=1\cdot\sqrt{R^2-y^2}+(y+R)\cdot\frac{-\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{R^2-y^2}}=\frac{\left(\sqrt{R^2-y^2}\right)^2-y(y+R)}{\sqrt{R^2-y^2}}$$

$$f'(y) = \frac{R^2-y^2-y^2-yR}{\sqrt{R^2-y^2}} = \frac{R^2-2y^2-yR}{\sqrt{R^2-y^2}}.$$

$$f''(y) = \frac{(-4y-R)\cdot\sqrt{R^2-y^2} - (R^2-2y^2-yR)\cdot\frac{-2y}{2\sqrt{R^2-y^2}}}{\left(\sqrt{R^2-y^2}\right)^2}.$$

• Condición de extremo.

$$f'(y)=0 \rightarrow R^2-2y^2-yR=0 \Leftrightarrow \boxed{2y^2+yR-R^2=0}$$

$$y = \frac{-R\pm\sqrt{R^2-4\cdot 2\cdot(-R^2)}}{2\cdot 2} = \frac{-R\pm 3R}{4} = \begin{cases} -R \\ R/2 \end{cases}.$$

Para averiguar el signo de $f''(y)$ en los valores obtenidos de $f'=0$

- el 2º sumando del numerador es NULO : $(R^2-2y^2-yR=0)$
- el denominador es positivo siempre.
- el signo del 1er sumando es el signo de $(-4y-R)$ pues $\sqrt{R^2-y^2}>0$.

$y=-R$ no tiene sentido (no hay triángulo)

$$\operatorname{sig} f''(R/2) = \operatorname{sig}\left(-4\cdot\frac{R}{2}-R\right) < 0 \rightarrow \text{máximo}.$$

• Solución:

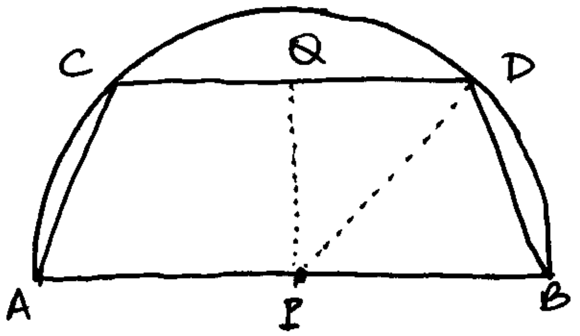
$$y=\frac{R}{2} \rightarrow x=\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2-\frac{R^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}R}{2}.$$

Altura del triángulo (del vértice C)

$$h=R+\frac{R}{2} \quad (h=R+y) \rightarrow h=\frac{3R}{2}.$$

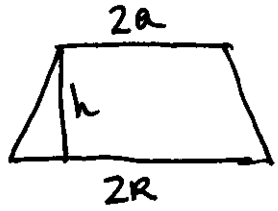
Cociente altura/radio: $\frac{h}{R}=\frac{3}{2}$.

C3 Observa la figura

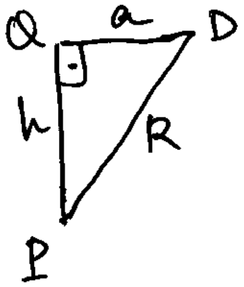


AB = 2R

a



- Variables: base menor (2a), altura (h)
- ligadura: el triángulo $\widehat{PQD}$ es recto en Q y cumplirá el teorema de Pitágoras



$$a^2+h^2=R^2.$$

- Función a optimizar: área del trapecio $f=\frac{2R+2a}{2}\cdot h$

$$f=(R+a)\cdot h$$

- Se introduce la ligadura $h=\sqrt{R^2-a^2}$

$$\boxed{f(a)=(R+a)\cdot\sqrt{R^2-a^2}}$$

- 1ª y 2ª derivadas

$$f'(a)=1\cdot\sqrt{R^2-a^2}+(R+a)\cdot\frac{-2a}{2\sqrt{R^2-a^2}}=\frac{\left(\sqrt{R^2-a^2}\right)^2-a\cdot(R+a)}{\sqrt{R^2-a^2}}$$

$$f'(a) = \frac{R^2-a^2-aR-a^2}{\sqrt{R^2-a^2}} = \frac{R^2-2a^2-aR}{\sqrt{R^2-a^2}}.$$

$$f''(a) = \frac{(-4a-R)\cdot\sqrt{R^2-a^2} - (R^2-2a^2-aR)\cdot\frac{-2a}{\sqrt{R^2-a^2}}}{\left(\sqrt{R^2-a^2}\right)^2}$$

- Condición de extremo

$$f'(a)=0 \longrightarrow R^2-2a^2-aR=0 \iff \boxed{2a^2+aR-R^2=0}$$

$$a = \frac{-R\pm\sqrt{R^2-4\cdot2\cdot(-R^2)}}{2\cdot2} = \frac{-R\pm\sqrt{9R^2}}{4} = \frac{-R\pm3R}{4} = \left\langle \begin{array}{l} -R \\ \frac{R}{2} \end{array} \right. .$$

$a=-R$ no tiene sentido.

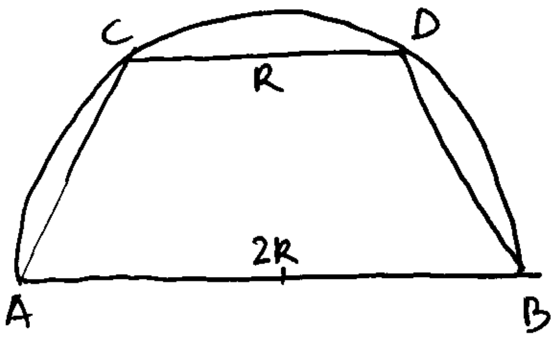
El signo de la 2ª derivada es el signo de $(-4a-R)$ pues a) el denominador es siempre positivo; b) el 2º sumando del numerador es nulo para $a=\frac{R}{2}$ R^2-2a^2-aR es cero.

$$a=\frac{R}{2}: \quad -4\cdot\frac{R}{2}-R<0 \Rightarrow \text{máximo.}$$

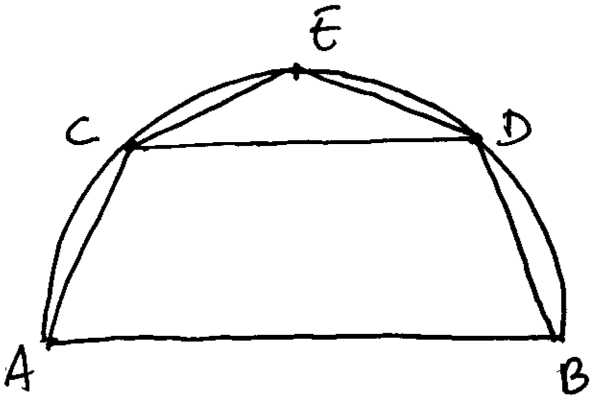
- Solución

$$a=\frac{R}{2} \rightarrow \ell = 2\cdot a = 2\cdot\frac{R}{2} = R$$

la longitud de la cuerda será el Radio de la semicircunferencia.



b



Las variables y la ligadura son las correspondientes al apartado a). La función a optimizar es el área del pentágono ACEDB que se obtiene como suma de

el trapecio ABCD $(R+a)\cdot h$

el triángulo $\widehat{CDE}$ $\quad \dfrac{2a\cdot(R-h)}{2} = a(R-h)$

la altura del triángulo es $(R-h)$

la base es $2a$

$$f = (R+a)\cdot h + a\cdot(R-h) = Rh + ah + aR - ah = R(a+h)$$

$$h = \sqrt{R^2-a^2} \Rightarrow \boxed{f(a) = R\cdot\left(a+\sqrt{R^2-a^2}\right)}$$

• 1ª y 2ª derivadas.

$$f'(a) = R\cdot\left[1+\frac{-2a}{2\sqrt{R^2-a^2}}\right] = R\cdot\frac{\sqrt{R^2-a^2}-a}{\sqrt{R^2-a^2}}$$

$$f''(a) = R\cdot\frac{\left(\frac{-2a}{2\sqrt{R^2-a^2}}-1\right)\cdot\sqrt{R^2-a^2} - \left(\sqrt{R^2-a^2}-a\right)\cdot\frac{-2a}{2\sqrt{R^2-a^2}}}{\left(\sqrt{R^2-a^2}\right)^2}.$$

• Condición de extremo

$$f'(a) = 0 \longrightarrow \sqrt{R^2-a^2} - a = 0 \iff a = \sqrt{R^2-a^2} \iff a^2 = \left(\sqrt{R^2-a^2}\right)^2$$

$$\iff a^2 = R^2 - a^2 \iff 2a^2 = R^2 \iff a^2 = \frac{R^2}{2} \longrightarrow a = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Racionalizando $\boxed{a = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}R}{2}}$

Veamos el signo de la 2ª derivada. No es necesario evaluar f'' en $R/\sqrt{2}$ pues:

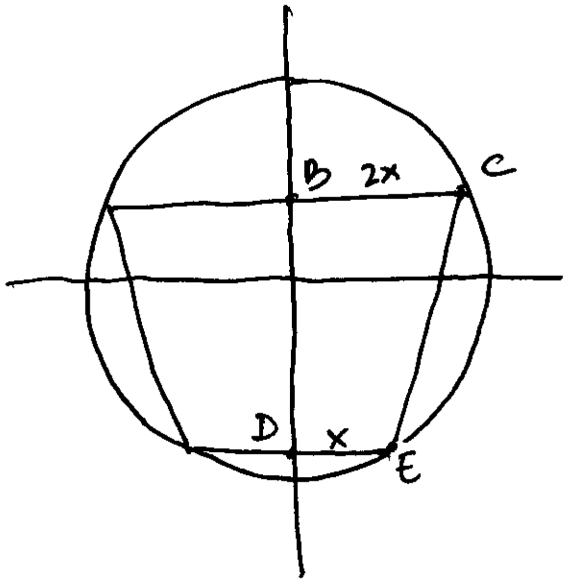
- el denominador es positivo : $(\ \ )^2$
- el 2º sumando del numerador es Nulo para $a = \frac{R}{\sqrt{2}}$: $\sqrt{R^2-a^2} - a$ es 0
- en el 1er sumando : $\sqrt{R^2-a^2}$ es positivo.

el signo de $f''(a)$ en $a = \frac{R}{\sqrt{2}}$ es el signo de $\frac{-a}{\sqrt{R^2-a^2}} - 1$ que fácilmente se ve que es NEGATIVO $\Rightarrow$ Máximo.

• La cuerda tendrá de longitud $2a = 2 \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} R = \sqrt{2}R$

$$\boxed{2a = \sqrt{2} \cdot R}$$

$\boxed{C4}$ Observa la figura:



- Variables

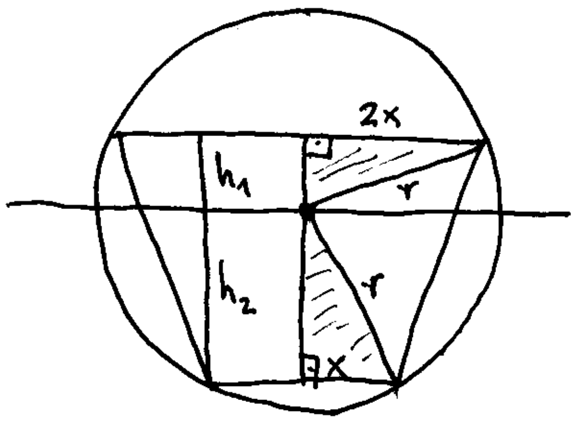
$DE = x \rightarrow BC = 2x$.

- Función a optimizar

Área del trapecio. Recuerda la fórmula $S = \frac{B+b}{2} \cdot h$

B = base mayor, b = base menor, h = altura.

Observa la figura



- la altura del trapecio es $h_1 + h_2$
- las bases son $2x$ y $4x$

$2x = 2 \cdot DE$

$4x = 2 \cdot BC$

- se aplica el teorema de Pitágoras a los 2 triángulos rayados.

$$\left.\begin{aligned} h_1^2 + (2x)^2 = r^2 &\longrightarrow h_1 = \sqrt{r^2 - 4x^2} \\ h_2^2 + x^2 = r^2 &\longrightarrow h_2 = \sqrt{r^2 - x^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$S(x) = \frac{4x + 2x}{2} \cdot \left(\sqrt{r^2 - 4x^2} + \sqrt{r^2 - x^2} \right)$$

$$\boxed{S(x) = 3x \cdot \left(\sqrt{r^2 - 4x^2} + \sqrt{r^2 - x^2} \right)}$$

Observación:

Optimizar $S(x)$ equivale a optimizar $f(x) = x \cdot \left(\sqrt{r^2 - 4x^2} + \sqrt{r^2 - x^2} \right)$

El <u>3</u> sólo complica las operaciones y es innecesario para la optimización.

$$f(x) = x \cdot \left(\sqrt{r^2 - 4x^2} + \sqrt{r^2 - x^2} \right)$$

- 1ª y 2ª derivadas.

$$f'(x) = 1 \cdot \left(\sqrt{r^2 - 4x^2} + \sqrt{r^2 - x^2} \right) + x \cdot \left(\frac{-8x}{2\sqrt{r^2 - 4x^2}} + \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \right)$$

$$f'(x) = \sqrt{r^2 - 4x^2} + \sqrt{r^2 - x^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{r^2 - 4x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

$$f''(x) = \frac{-8x}{2\sqrt{r^2 - 4x^2}} + \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{8x \cdot \sqrt{r^2 - 4x^2} - 4x^2 \cdot \frac{-8x}{2\sqrt{r^2 - 4x^2}}}{r^2 - 4x^2}.$$

$$- \frac{2x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} - x^2 \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}}{r^2 - x^2}$$

- Condición de extremo:

$$f'(x) = 0 \rightarrow$$

$$\sqrt{r^2-4x^2} + \sqrt{r^2-x^2} = x^2 \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{r^2-4x^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}} \right) \iff$$

$$\sqrt{r^2-4x^2} + \sqrt{r^2-x^2} = x^2 \cdot \frac{4\sqrt{r^2-x^2} + \sqrt{r^2-4x^2}}{\sqrt{r^2-4x^2} \cdot \sqrt{r^2-x^2}} \iff$$

$$\sqrt{r^2-4x^2} \cdot \sqrt{r^2-x^2} \cdot \left[\sqrt{r^2-4x^2} + \sqrt{r^2-x^2} \right] = x^2 \cdot \left[4\sqrt{r^2-x^2} + \sqrt{r^2-4x^2} \right] \iff$$

$$(r^2-4x^2) \cdot \sqrt{r^2-x^2} + (r^2-x^2) \cdot \sqrt{r^2-4x^2} = x^2 \cdot \left[4\sqrt{r^2-x^2} + \sqrt{r^2-4x^2} \right]$$

agrupando: una raíz en cada miembro y extrayendo factores comunes

$$(r^2-x^2-x^2) \cdot \sqrt{r^2-4x^2} = (4x^2-r^2+4x^2) \cdot \sqrt{r^2-x^2} \iff$$

$$(r^2-2x^2) \cdot \sqrt{r^2-4x^2} = (8x^2-r^2) \cdot \sqrt{r^2-x^2}.$$

Elevando al cuadrado

$$(r^2-2x^2)^2 \cdot (r^2-4x^2) = (8x^2-r^2)^2 \cdot (r^2-x^2)$$

$$(r^4-4r^2x^2+4x^4) \cdot (r^2-4x^2) = (64x^4-16r^2x^2+r^4) \cdot (r^2-x^2)$$

$$\cancel{r^6} - 4r^4x^2 - 4r^4x^2 + 16r^2x^4 + 4r^2x^4 - 16x^6 = 64r^2x^4 - 64x^6 - 16r^4x^2 + 16r^2x^4 + \cancel{r^6} - r^4x^2$$

$$\boxed{48x^6 + 9r^4x^2 - 60r^2x^4 = 0}$$

Simplificando entre $3x^2$

$$\boxed{16x^4 - 20r^2x^2 + 3r^4 = 0}$$

Resolviendo la ecuación bicuadrada

$$x^2 = \frac{20r^2 \pm \sqrt{(-20r^2)^2 - 4\cdot 16\cdot 3r^4}}{2\cdot 16} = \frac{20r^2 \pm \sqrt{208r^4}}{32}.$$

$208 = 16\cdot 13 \Rightarrow$

$$x^2 = \frac{20r^2 \pm \sqrt{16r^2\cdot 13}}{32} = \frac{5\pm\sqrt{13}}{8}\,r^2$$

Hay 2 soluciones posibles

$$x_1 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{8}}\cdot r$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{13}}{8}}\cdot r$$

Obviamente $2x$ es menor que el radio.

$$2x < r \rightarrow x < r/2$$

Entonces:

$x_1 \simeq 1{,}03\,r$ imposible

$x_2 \simeq 0{,}41\,r$. válida !!

$\Rightarrow$ solución: $\boxed{x = \sqrt{\frac{5-\sqrt{13}}{8}}\cdot r}$