NÚMEROS.

N1. Encuentra dos números positivos cuya suma sea 120, tales que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

N2. Expresa el número 90 como suma de tres enteros positivos de modo que el 2º sea doble que el 1º y su producto sea máximo. Determina el valor de dicho producto.

N3. Descompón el número 14 en suma de tres números reales positivos tales que uno de ellos sea el doble del otro, y la suma de los cuadrados de los tres sea la menor posible.

N4. Dos números no negativos suman 40. ¿Cuál es el mínimo valor que puede tomar la suma del cubo del 1º más el triple del cuadrado del 2, y cuánto valen los número en dicho caso?

N5. Halla un número cuya suma con 25 veces su inverso sea mínima.

N6. Dado r > 0, prueba que entre todos los números positivos x e y tales que $x^2+y^2=r$, la suma x+y es máxima cuando x=y.

N7. Dado S>0, prueba que entre todos los números positivos x e y tales que x+y=S, la suma x^2+y^2 es mínima cuando x=y.

N8. Dados n números reales $a_1, a_2 ... a_n$. Demuestra que la suma $\sum_{k=1}^{n}(x-a_k)^2$ es mínima cuando x es la media aritmética de $a_1, a_2 ... a_n$.

$\boxed{N1}$ • Variables x, y

• ligadura $x + y = 120$

• función a optimizar $P = x \cdot y^2$.

• Se introduce la ligadura en la función

$$x = 120 - y \longrightarrow P(y) = (120 - y) \cdot y^2. \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \quad P(y) = 120y^2 - y^3$$

• 1ª y 2ª derivada

$$P'(y) = 240y - 3y^2$$

$$P''(y) = 240 - 6y.$$

• Condición de extremo

$$P' = 0 \longrightarrow 240y - 3y^2 = 0 \rightarrow 3y \cdot (80 - y) = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 80. \end{cases}$$

$$P''(0) = 240 - 6 \cdot 0 = 240 > 0 \longrightarrow \text{mínimo}.$$

$$P''(80) = 240 - 6 \cdot 80 = -240 < 0 \rightarrow \text{máximo}.$$

• Solución:

$$y = 80 \longrightarrow x = 120 - y = 120 - 80 = 40.$$

$$P_M = 40 \cdot 80^2 = 256000$$

(*) La otra opción produce una función algo más complicada

$$y = 120 - x \rightarrow P(x) = x \cdot (120 - x)^2.$$

$\boxed{N2}$

Sean x, y, z los 3 enteros positivos buscados.

- Ligaduras:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=90 \\ y=2x \end{array}\right\}$$

He considerado que (y) es el 2º y (x) el 1º.

- Función a optimizar: producto de los números.

$$P = x \cdot y \cdot z.$$

- Introducimos las ligaduras (o restricciones) en la función:

$$\left.\begin{array}{l} z = 90-x-y = 90-x-2x = 90-3x \\ y=2x \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$P(x) = x \cdot 2x \cdot (90-3x) = 180x^2 - 6x^3.$$

- Derivadas

$$P'(x) = 360x - 18x^2 \qquad P''(x) = 360 - 36x$$

- Condición de extremo

$$P' = 0 \rightarrow 360x - 18x^2 = 0 \rightarrow x \cdot (360 - 18x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{360}{18} = 20 \end{cases}$$

$P''(0) = 360 > 0 \rightarrow$ mínimo.

$P''(20) = 360 - 36 \cdot 20 = -360 < 0 \rightarrow$ máximo.

- Solución:

$x = 20, \quad y = 2 \cdot 20 = 40, \quad z = 90 - x - y = 30.$

Producto máximo $= 20 \cdot 40 \cdot 30 = 24000.$

$\boxed{N3}$

Sean x, y, z los 3 números buscados.

Restricciones o ligaduras:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=14 \\ x=2y \end{array}\right\}$$

Función a optimizar

$$S = x^2 + y^2 + z^2.$$

Introducimos las ligaduras en la función:

$$z = 14 - x - y = 14 - 2y - y = 14 - 3y \Rightarrow$$

$$S = (2y)^2 + y^2 + (14-3y)^2 = 4y^2 + y^2 + 196 - 84y + 9y^2 \rightarrow$$

$$\boxed{S(y) = 14y^2 - 84y + 196}$$

Derivadas

$$S'(y) = 28y - 84 \qquad S''(y) = 28.$$

Condición de extremo:

$$S' = 0 \rightarrow 28y - 84 = 0 \rightarrow y = \frac{84}{28} = 3.$$

$$S''(3) = 28 > 0 \rightarrow \text{mínimo}.$$

Solución:

$$x = 2 \cdot 3 = 6 \qquad y = 3 \qquad z = 14 - 6 - 3 = 5$$

$$S_m = 6^2 + 3^2 + 5^2 = 70.$$

$\boxed{N4}$ Incógnitas : x, y (los números)

Ligadura : $x+y=40$.

Función a optimizar:

$$f(x,y) = x^3 + y^2.$$

Introducimos la ligadura en la función: $y = 40 - x$ (*)

$$f(x) = x^3 + (40-x)^2 = x^3 + 1600 - 80x + x^2.$$

Derivadas:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 80.$$

$$f''(x) = 6x + 2.$$

Condición de extremo : $f' = 0 \rightarrow$

$$3x^2+2x-80=0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-80)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{964}}{6}.$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 \cdot 241}}{6} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{241}}{6} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-1+\sqrt{241}}{3} \simeq 4{,}8 \\ \dfrac{-1-\sqrt{241}}{3} \simeq -5{,}5 \end{cases}$$

$$f''\left(\frac{-1+\sqrt{241}}{3}\right) > 0 \rightarrow \text{mínimo}.$$

$$f''\left(\frac{-1-\sqrt{241}}{3}\right) < 0 \rightarrow \text{máximo}.$$

Solución: $x = \dfrac{-1+\sqrt{241}}{3}$ $\quad y = 40 - \dfrac{-1+\sqrt{241}}{3} = \dfrac{121-\sqrt{241}}{3} \approx 35{,}1$

(*) Es más sencillo $y = 40 - x$ pues se calcula el cuadrado $(40-x)^2$

la otra opción $x = 40 - y \rightarrow$ tendremos el cubo $(40-y)^3$.

$\boxed{N5}$ Sea x el número.

Función a optimizar $f(x) = x + \frac{25}{x}$

Derivadas:

$$f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{50}{x^3}.$$

Condición de extremo:

$$f' = 0 \rightarrow 1 - \frac{25}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = \pm\sqrt{25} = \pm 5.$$

$$f''(5) = \frac{50}{5^3} > 0 \rightarrow \text{mínimo}.$$

$$f''(-5) = \frac{50}{(-5)^3} < 0 \rightarrow \text{máximo}.$$

Solución:

$$x = 5.$$

$$f(5) = 5 + \frac{25}{5} = 10.$$

La ligadura está incluida en la función a optimizar.

$\boxed{N6}$ • Variables x, y

• Función a optimizar: $f(x,y) = x + y$ (1)

• Restricción o ligadura: $x^2 + y^2 = r$.

$$y^2 = r - x^2 \longrightarrow y = +\sqrt{r - x^2} \qquad (2)$$

• Se introduce la ligadura en la función a optimizar. Observa que he despejado la y, pero habría sido lo mismo haberlo hecho con la x.

$$\boxed{f(x) = x + \sqrt{r - x^2}}$$

• 1ª y 2ª derivada

$$f'(x) = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{r-x^2}} = 1 + \frac{-x}{\sqrt{r-x^2}} = \frac{\sqrt{r-x^2} - x}{\sqrt{r-x^2}}. \qquad (3)$$

$$f''(x) = \frac{-1 \cdot \sqrt{r-x^2} - (-x) \cdot \frac{-2x}{\sqrt{r-x^2}}}{\left(\sqrt{r-x^2}\right)^2} = \frac{-\sqrt{r-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{r-x^2}}}{(r-x^2)}$$

$$= \frac{\frac{-\left(\sqrt{r-x^2}\right)^2 - x^2}{\sqrt{r-x^2}}}{(r-x^2)} = \frac{-(r-x^2) - x^2}{(r-x^2) \cdot \sqrt{r-x^2}} = \frac{-r}{(r-x^2)^{3/2}}$$

• Condición de extremo: $f' = 0$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{r-x^2} - x}{\sqrt{r-x^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{r-x^2} - x = 0 \Leftrightarrow \boxed{\sqrt{r-x^2} = x}$$

elevando al cuadrado ambos miembros

$$r - x^2 = x^2 \Rightarrow 2x^2 = r \rightarrow x = \sqrt{\frac{r}{2}}$$

$f''\left(\sqrt{\frac{r}{2}}\right) < 0 \longrightarrow$ se trata de un máximo. (4)

¿y? $y = \sqrt{r - x^2} = \sqrt{r - \frac{r}{2}} = \sqrt{\frac{r}{2}} \Rightarrow \boxed{x = y = \sqrt{\frac{r}{2}}}$

Valor máximo : $f_M = \sqrt{\frac{r}{2}} + \sqrt{\frac{r}{2}} = 2\sqrt{\frac{r}{2}} = \sqrt{2r}$.

Observaciones:

(1) Podemos escribir $f = x + y$ en vez de $f(x,y)$

(2) Sólo tomamos el signo positivo por hipótesis: el enunciado establece que x e y son números positivos.

(3) He empleado la segunda expresión de $f'(x)$ para calcular $f''(x)$ y la última para averiguar cuándo $f'(x)$ es nula.

(4) Dado que x, y, r son positivos el signo de $f''(x)$ es SIEMPRE negativo pues:

- el denominador es siempre POSITIVO.

$$r - x^2 > 0 \rightarrow (r - x^2)^{3/2} > 0.$$

- el numerador es siempre NEGATIVO.

$$r > 0 \longrightarrow -r < 0.$$

N7 • Variables: x, y (ambos positivos)

• Función a optimizar: $f(x,y) = x^2 + y^2$.

• Restricción o ligadura: $S = x + y$

• Se introduce la ligadura en la función. Observa que es indistinto despejar la x ó la y. $\boxed{y = S - x} \Rightarrow$

$$\boxed{f(x) = x^2 + (S-x)^2}$$

• 1ª y 2ª derivadas.

$$f'(x) = 2x + 2\cdot(S-x)\cdot(-1) = 4x - 2S.$$

$$f''(x) = 4.$$

• Condición de extremo:

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4x - 2S = 0 \rightarrow x = \frac{S}{2}.$$

$$f''\left(\frac{S}{2}\right) = 4 > 0 \rightarrow \text{mínimo}.$$

• Solución: $x = \frac{S}{2} \rightarrow y = S - \frac{S}{2} = \frac{S}{2} \Rightarrow \boxed{x = y = \frac{S}{2}}$

Valor mínimo: $f_m = \left(\frac{S}{2}\right)^2 + \left(\frac{S}{2}\right)^2 = 2\cdot\frac{S^2}{4} = \frac{S^2}{2}$.

$\boxed{N8}$ Sea $f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x-a_k)^2 = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \cdots + (x-a_n)^2$ la función a optimizar:

1ª y 2ª derivadas

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} 2\cdot(x-a_k)$$

$$f''(x) = \sum_{k=1}^{n} 2 = 2n.$$

Condición de extremo: $f'(x) = 0 \rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n} 2\cdot(x-a_k) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} (x-a_k) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} x = \sum_{k=1}^{n} a_k \Leftrightarrow n\cdot x\cdot = \sum_{k=1}^{n} a_k \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k}$$

$$f''\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k\right) = 2n > 0 \rightarrow \text{mínimo.}$$

Observa

$$x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$