RECTÁNGULOS.

R1. Un jardinero dispone de 120 metros de valla y desea delimitar un terreno rectangu-lar y dividirlo en 5 lotes iguales con vallas paralelas a uno de los lados. ¿Qué dimen-siones deberá tener el terreno para que el área sea la mayor posible? (Haz un dibujo de la situación)

R2. Encuentra de entre todos los rectángulos de perímetro 2p el que tiene diagonal mí-nima.

R3. Para la construcción de una ventana en el vestíbulo de una sala de conciertos se duda en la forma: como un cuadrado, como un círculo o con forma de un cuadrado con un semicírculo en su parte superior. Determina las dimensiones de la ventana si se desea que tenga la máxima superficie y se exige que el perímetro tenga 16 metros.

R4. Se quiere construir un marco para una ventana de 6 m^2 de superficie. El metro lineal del tramo horizontal cuesta 24 € y el del tramo vertical 36 €. Calcula las dimensiones que debe tener la ventana para que el coste del marco sea mínimo. ¿Cuál sería el coste? **R5.** Un granjero dispone de 300 € para cercar una porción rectangular de terreno adya-cente a un río, usando a éste como un lado del área cercada (construirá tres cercas). El coste de la cerca paralela al río es de 5 € por metro instalado, y el de la cerca para cada uno de los dos lados restantes es de 3 € por metro instalado. Calcula las dimensiones del área máxima que pueda ser cercada.

R6 De todos los rectángulos de área 100 dm^2, halla las dimensiones del que tenga la diagonal mínima.

R7. Demuestra que entre todos los rectángulos de área dada, el cuadrado es el de perí-metro mínimo.

R8. Un granjero tiene L metros de alambre para cercar un terreno de pasto rectangular adyacente a un muro de piedra. ¿Qué dimensiones darán el área máxima al terreno cer-cado?

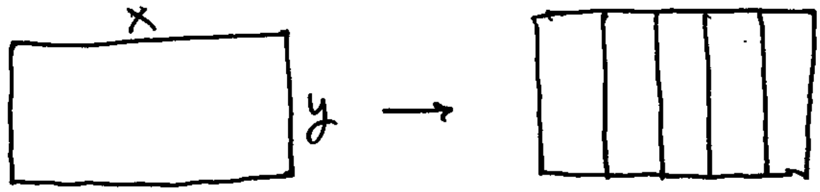
R9. Un granjero quiere cercar un terreno rectangular de área A adyacente a un muro de piedra. ¿Qué dimensiones exigen la mínima cantidad de alambre de la cerca?

R10. Cada lado de un cuadrado tiene una longitud L. Demuestra que entre todos los cuadrados inscritos en el cuadrado dado, el de área mínima tiene de longitud $L\sqrt{2}/2$.

R11. Cada lado de un cuadrado tiene una longitud L. Halla el tamaño del cuadrado de área máxima que puede circunscribirse al cuadrado dado.

R12. Se quiere construir el marco de una ventana rectangular de 8 metros cuadrados. El metro lineal de tramos horizontal cuesta 2,5 €, mientras que el metro lineal de tramos vertical cuesta 5 €. Determina las dimensiones de la ventana para que el coste sea mí-nimo. ¿Cuánto cuesta el marco?

R1 Hagamos un dibujo de la situación.



terreno rectangular

lo dividimos en 5 lotes iguales

Incógnitas
dimensiones : "alto" y "largo" x

Ligadura: disponemos de 120 m de valla.

$$2x + 6y = 120 \iff \boxed{x + 3y = 60}$$

Función a optimizar: área del rectángulo.

$$\boxed{A = x \cdot y.}$$

Se despeja una variable de la ligadura: $x = 60 - 3y \Rightarrow$

$$A(y) = (60 - 3y) \cdot y = 60y - 3y^2.$$

$A'(y) = 60 - 6y$

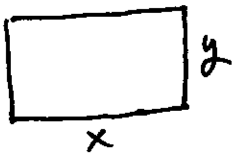
$A''(y) = 60.$

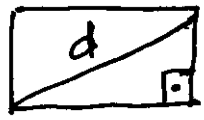
Condición de extremo: $A' = 0 \rightarrow 60 - 6y = 0 \Rightarrow \boxed{y = 10}$

$\rightarrow x = 60 - 3 \cdot 10 = 30.$

Solución: un rectángulo de 30×10.

$\boxed{R2}$ Incógnitas: lados del rectángulo





ligadura: $2x+2y=2p. \leftrightarrow \boxed{x+y=p}$

Función a optimizar: $d=\sqrt{x^2+y^2}$

$$x=p-y \rightarrow \boxed{d(y)=\sqrt{(p-y)^2+x^2}}$$

Se puede justificar que los extremos de $\sqrt{f}$ son los extremos de f.

$\Rightarrow$ deberemos optimizar ~~lo~~ el radicando.

$$f(y)=(p-y)^2+y^2$$

$$f'(y)=2\cdot(p-y)\cdot(-1)+2y=-2p+2y+2y=4y-2p.$$

$$f''(y)=4.$$

Condición de extremo: $f'=0 \rightarrow 4y-2p=0 \Rightarrow y=\frac{2p}{4}=\frac{p}{2}$

$f''(p/2)=4>0 \rightarrow$ mínimo.

Solución:

$$y=\frac{p}{2}, \quad x=p-\frac{p}{2}=\frac{p}{2}. \qquad d_m^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{2}$$

$$\rightarrow d_m=\sqrt{\frac{p^2}{2}}=\frac{p}{\sqrt{2}}=\frac{p\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{p\sqrt{2}}{2} \Rrightarrow \boxed{d_m=\frac{p\sqrt{2}}{2}}$$

Observa que la solución es un cuadrado.

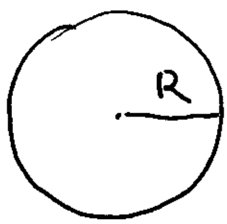
$d_m \equiv$ diagonal mínima.

R3 • Ventana CUADRADA

Si el perímetro es 16m $\rightarrow$ $p = 4\ell$ $\Rightarrow$

$$\ell = \frac{16}{4} = 4m \rightarrow \boxed{A = 4^2 = 16m^2}$$

• Ventana CIRCULAR



circunferencia 16 m $\rightarrow$ $2\pi R = 16$ $\rightarrow$ $R = \frac{16}{2\pi} = \frac{8}{\pi}$

$$\boxed{A = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot \left(\frac{8}{\pi}\right)^2 = \frac{64}{\pi} \simeq 20{,}37 m^2}$$

• Ventana MIXTA

El semicírculo tiene de diámetro el lado del cuadrado.

$$2x = \ell \quad x = \frac{\ell}{2} \quad \rightarrow L = \pi x = \pi \cdot \frac{\ell}{2} \rightarrow$$

$$3\ell + L = 16 \leftrightarrow 3\ell + \frac{\pi \ell}{2} = 16 \rightarrow \ell = \frac{16}{3 + \pi/2}$$

$$\ell = \frac{32}{6 + \pi}$$

$$A = A_{cuadrado} + A_{semicírculo}.$$

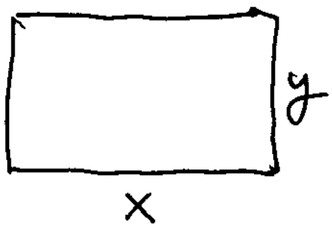
$$A_{cuadrado} = \ell^2 = \left(\frac{32}{6+\pi}\right)^2 \simeq 12{,}25 \ m^2$$

$$A_{semicírculo} = \frac{1}{2}\pi x^2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{16}{6+\pi}\right)^2 \simeq 4{,}81 \ m^2$$

$$\Rightarrow \boxed{17{,}06 \ m^2}$$

La ventana CIRCULAR es la que ofrece máxima superficie para idéntico perímetro.

$\boxed{R4}$ Observa la figura



x = tramo horizontal
y = tramo vertical

- ligadura $\boxed{x \cdot y = 6}$ (el área es 6 m^2).
- función a optimizar C = coste de la ventana

$$C = 2 \cdot 24x + 2 \cdot 36y \Leftrightarrow \boxed{C = 48x + 72y}$$

- Se introduce la ligadura en la función:

$$y = \frac{6}{x} \rightarrow C(x) = 48x + 72 \cdot \frac{6}{x} \Rightarrow$$

$$\boxed{C(x) = 48x + \frac{432}{x}}$$

- 1ª y 2ª derivada

$$C'(x) = 48 - \frac{432}{x^2} \qquad C''(x) = \frac{864}{x^3}.$$

- Condición de extremos: $C' = 0 \rightarrow 48 - \frac{432}{x^2} = 0 \rightarrow$

$$x^2 = \frac{432}{48} = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9}$$

Sólo tiene sentido la solución positiva $x = 3$.

$$C''(3) = \frac{864}{3^3} > 0 \rightarrow \text{mínimo.}$$

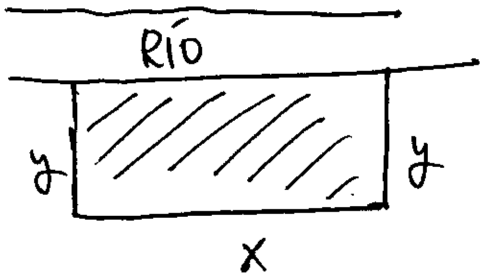
$\boxed{\text{Solución}}$

$$x = 3m \longrightarrow y = \frac{6}{x} = \frac{6}{3} = 2m$$

Coste mínimo $C_m = 2 \cdot 24 \cdot 3 + 2 \cdot 36 \cdot 2 = 288$ €

R5 • Variables: x (longitud de la cerca paralela al río), 2y (longitud de la cerca perpendicular al río).

El hecho de elegir 2y en vez de y será para simplificar las operaciones. Observa la figura



• Restricción o ligadura: sólo tenemos 300 € para cercar la finca.

$$5x + 2y \cdot 3 = 300$$

• Función a optimizar $f(x,y) = x \cdot y$

• Se introduce la ligadura en la función. Observa que despejar la x ó la y va a ser muy parecido, y en la función a optimizar el papel de x e y es el mismo.

$$y = \frac{300-5x}{6} \rightarrow f(x) = x \cdot \frac{300-5x}{6} = \frac{300x-5x^2}{6}.$$

• 1ª y 2ª derivadas.

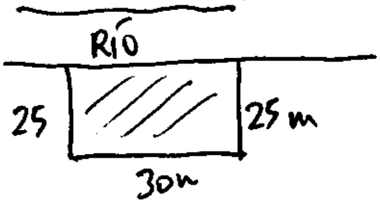
$$f'(x) = \frac{300-10x}{6} \qquad f''(x) = \frac{-10}{6}.$$

• Condición de extremo: $f'=0 \rightarrow \frac{300-10x}{6} = 0 \rightarrow 300-10x=0 \rightarrow \boxed{x=30}$

$f''(30) = \frac{-10}{6} < 0 \rightarrow$ máximo.

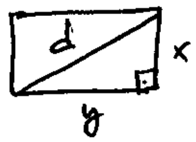
• Solución:

$$x=30 \rightarrow y = \frac{300-5\cdot 30}{6} = 25 \Rightarrow f_M = 30 \cdot 25 = 750\,m^2$$



R6 • Sean x, y (positivos) las dimensiones del rectángulo.

• Restricción: $x \cdot y = 100$



• Función a optimizar $d = \sqrt{x^2+y^2}$

Observación: los extremos de $\sqrt{f(x)}$ son los extremos $f(x)$.

Vamos a optimizar $d^2 = x^2+y^2$, a esta función la llamaremos $f(x,y) = x^2+y^2$.

Por simetría es indiferente trabajar con la x ó la y.

$$y = \frac{100}{x} \Rightarrow f(x) = x^2 + \left(\frac{100}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{10000}{x^2}.$$

• 1ª y 2ª derivada:

$$f'(x) = 2x - \frac{20000}{x^3} \qquad f''(x) = 2 + \frac{60000}{x^4}$$

• Condición de extremo: $f' = 0 \rightarrow 2x - \frac{20000}{x^3} = 0 \rightarrow$

$x^4 = 10000 \rightarrow x = \pm\sqrt[4]{10000} = 10$

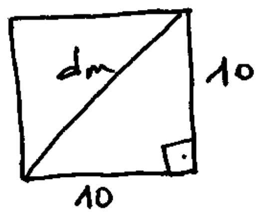
(sólo se considera válida la solución positiva)

$f''(10) = 2 + \frac{60000}{10^4} > 0 \rightarrow$ mínimo.

• Solución:

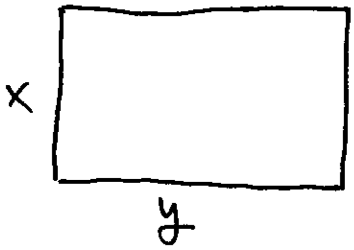
$$x = 10 \longrightarrow y = \frac{100}{10} = 10 \rightarrow d_m = \sqrt{10^2+10^2} = \sqrt{200}.$$

Se trata de un cuadrado. El rectángulo de diagonal mínima es un cuadrado.



$\boxed{R7}$ Sean x, y las dimensiones del rectángulo y $A>0$ el área del mismo.

• Función a optimizar



$$p = 2x + 2y \quad \text{(perímetro)}$$

• Restricción: $x \cdot y = A$.

• Se introduce la ligadura o restricción en la función a optimizar. Observa que es indiferente trabajar con la x ó la y.

$$y = \frac{A}{x} \rightarrow p(x) = 2x + 2\frac{A}{x} = 2x + \frac{2A}{x}.$$

• 1ª y 2ª derivadas

$$p'(x) = 2 - \frac{2A}{x^2} \qquad p''(x) = \frac{4A}{x^3}.$$

• Condición de extremo: $p' = 0 \rightarrow 2 - \frac{2A}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 = A$.

$\rightarrow x = \sqrt{A}$

$$p''(\sqrt{A}) = \frac{4A}{(\sqrt{A})^3} > 0 \rightarrow \text{mínimo}.$$

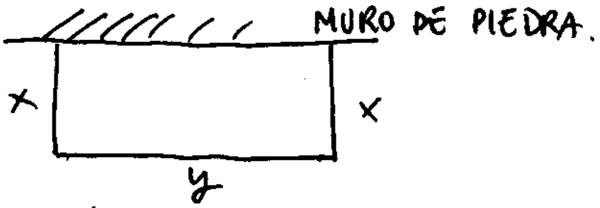
• Solución:

$$x = \sqrt{A} \longrightarrow y = \frac{A}{\sqrt{A}} = \frac{A}{\sqrt{A}} \cdot \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A}} = \frac{A \cdot \sqrt{A}}{A} = \sqrt{A} \Rightarrow x = y = \sqrt{A}$$

por lo tanto se trata de un cuadrado.

El rectángulo de perímetro mínimo es el cuadrado.

R8 Un dibujo de la situación ayuda a plantear el problema.



- Variables: dimensiones del rectángulo
- Ligadura: se dispone de L metros de alambre: $\boxed{2x+y=L}$
- Función a optimizar: área del rectángulo

$$f = x \cdot y$$

- Se introduce la ligadura: $y = L-2x \rightarrow \boxed{f(x) = x\cdot(L-2x)}$

$\Leftrightarrow f(x) = x \cdot L - 2x^2.$

- 1ª y 2ª derivada

$$f'(x) = L - 4x \qquad f''(x) = -4.$$

- Condición de extremo

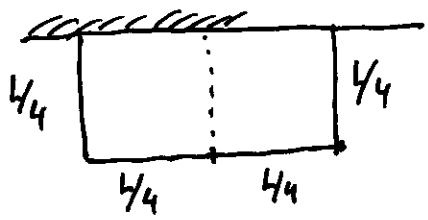
$$f'(x) = 0 \longrightarrow L - 4x = 0 \rightarrow x = \frac{L}{4} \qquad f''\left(\frac{L}{4}\right) = -4 < 0 \rightarrow \text{máximo.}$$

- Solución:

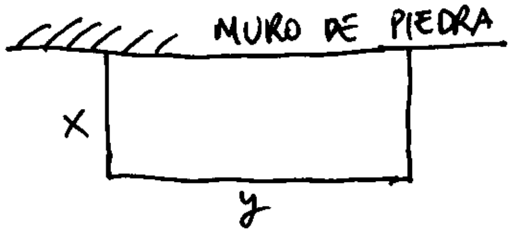
$$x = \frac{L}{4} \longrightarrow y = L - 2\cdot\frac{L}{4} = L - \frac{2L}{4} = \frac{L}{2}.$$

Área máxima $A_M = \frac{L}{4}\cdot\frac{L}{2} = \frac{L^2}{8}$

La "forma" es de 2 cuadrados pegados.



$\boxed{R9}$ Un dibujo ayudará a plantear el problema



- Variables: dimensiones del rectángulo: x, y.
- Ligadura o restricción: el área es fija $\boxed{x \cdot y = A}$
- Función a optimizar: perímetro (salvo la parte del muro)

$$f = 2x + y.$$

- Se introduce la ligadura en la función a optimizar

$$y = \frac{A}{x} \rightarrow \boxed{f(x) = 2x + \frac{A}{x}}$$

- 1ª y 2ª derivadas:

$$f'(x) = 2 - \frac{A}{x^2} \qquad f''(x) = \frac{2A}{x^3}.$$

- Condición de extremo

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2 - \frac{A}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 = \frac{A}{2} \rightarrow x = +\sqrt{\frac{A}{2}}$$

Sólo tiene sentido la solución POSITIVA, pues x es una longitud.

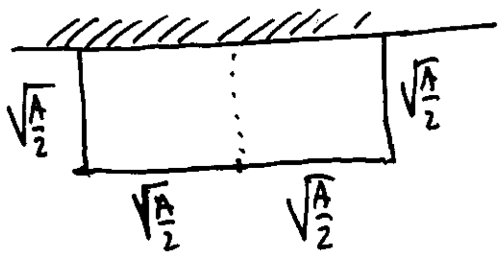
$$f''\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right) > 0 \rightarrow \text{mínimo}.$$

- Solución:

$$\boxed{x = \sqrt{\frac{A}{2}}} \rightarrow y = \frac{A}{\sqrt{A/2}} = A\sqrt{\frac{2}{A}} = \sqrt{A^2 \cdot \frac{2}{A}} = \sqrt{2A}. \rightarrow \boxed{y = \sqrt{2A}}$$

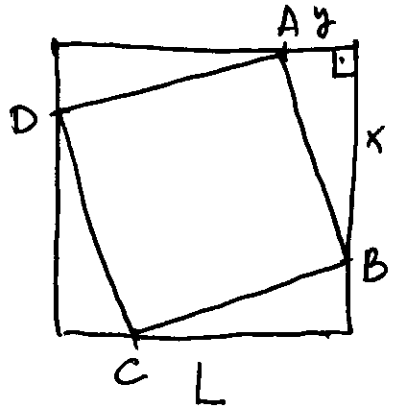
Perímetro mínimo: $\boxed{P_m = 2\sqrt{\frac{A}{2}} + \sqrt{2A} = \sqrt{4\frac{A}{2}} + \sqrt{2A} = \sqrt{2A} + \sqrt{2A} = 2\sqrt{2A}}$

Observar: $y/x = \frac{\sqrt{2A}}{\sqrt{\frac{A}{2}}} = \sqrt{4} = 2 \rightarrow$ Forma:



(Igual que en $\boxed{R8}$).

R10 Un dibujo ayudará a plantear el problema



ABCD = cuadrado inscrito.

- Variables: x, y
- ligadura: $x + y = L$
- Función a optimizar $S = AB^2$

  observa que AB, x, y forman un triángulo rectángulo

  $$AB^2 = x^2 + y^2 \quad \text{(teorema de Pitágoras)}$$

  $$\Rightarrow S = x^2 + y^2$$

- Se introduce la ligadura en la función: $y = L - x \rightarrow \boxed{S = x^2 + (L-x)^2}$
- 1ª y 2ª derivada

  $$S'(x) = 2x - 2(L-x) = 4x - 2L \qquad S''(x) = 4.$$

- Condición de extremo: $S'(x) = 0 \rightarrow 4x - 2L = 0 \rightarrow x = \frac{2L}{4} = \frac{L}{2}$

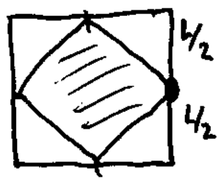
  $S''\left(\frac{L}{2}\right) = 4 > 0 \rightarrow$ mínimo.

- Solución: $x = \frac{L}{2} \rightarrow y = L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2}$

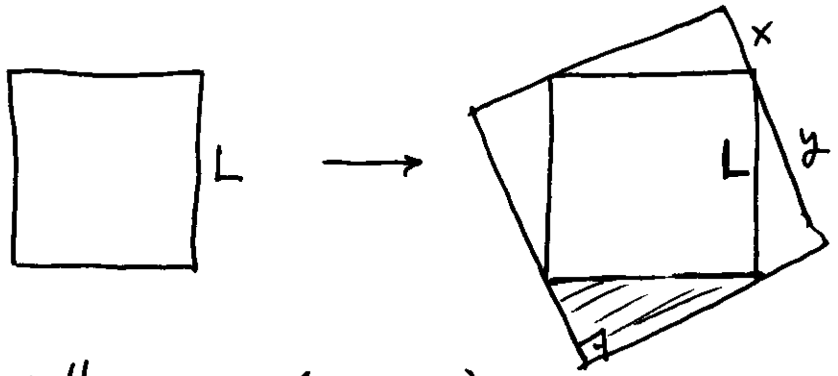
  lado del cuadrado inscrito AB : $AB^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{4} = \frac{L^2}{2} \rightarrow$

  $$AB = \sqrt{\frac{L^2}{2}} = \frac{L}{\sqrt{2}} = \frac{L}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{L\sqrt{2}}{2}$$

La solución gráfica es:



R11 Observa las figuras. Al cuadrado de lado L le circunscribimos un cuadrado



- Variables: x, y $(x, y > 0)$
- Función a optimizar $f = (x+y)^2$. área del cuadrado circunscrito.
- Ligadura: los 4 triángulos como el sombreados son iguales y rectángulos, por lo tanto, cumplen el teorema de Pitágoras

$$x^2 + y^2 = L^2$$

- Se introduce la ligadura en la función.

$$y^2 = L^2 - x^2 \rightarrow y = \sqrt{L^2 - x^2}$$ (sólo tiene sentido la solución positiva)

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \left[x + \sqrt{L^2 - x^2}\right]^2.} \quad (1)$$

Recuerda que optimizar f^2 equivale a optimizar f (es decir el máximo lado de un cuadrado proporcionará su mayor área). Por lo tanto, deberemos optimizar la base de la potencia en (1), que seguiremos llamando f

$$\boxed{f(x) = x + \sqrt{L^2 - x^2}}$$

• 1ª y 2ª derivadas

$$f'(x) = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{L^2-x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{L^2-x^2}}.$$

$$f''(x) = -\frac{1\cdot\sqrt{L^2-x^2} - x\cdot\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{L^2-x^2}}}{\left(\sqrt{L^2-x^2}\right)^2} = -\frac{\left(\sqrt{L^2-x^2}\right)^2 + x^2}{(L^2-x^2)^{3/2}} = -\frac{L^2}{(L^2-x^2)^{3/2}}.$$

• Condición de extremo

$$f'(x)=0 \to 1-\frac{x}{\sqrt{L^2-x^2}}=0 \to \frac{x}{\sqrt{L^2-x^2}}=1 \iff x=\sqrt{L^2-x^2}$$

$$\iff x^2=\left(\sqrt{L^2-x^2}\right)^2 \iff x^2=L^2-x^2 \iff 2x^2=L^2 \Rightarrow \boxed{x=\frac{L}{\sqrt{2}}}$$

$$f''\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right) < 0 \to \text{máximo}$$

(observa que f'' es siempre negativa).

• Solución:

$$x=\frac{L}{\sqrt{2}} \to y=\sqrt{L^2-x^2}=\sqrt{L^2-\frac{L^2}{2}}=\sqrt{\frac{L^2}{2}}=\frac{L}{\sqrt{2}}.$$

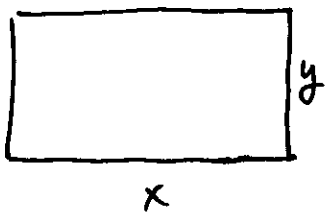
la solución, el lado del cuadrado será: $x+y=\frac{L}{\sqrt{2}}+\frac{L}{\sqrt{2}}=\frac{2L}{\sqrt{2}}$

racionalizando:

$$\frac{2L}{\sqrt{2}}=\frac{2L\cdot\sqrt{2}}{2}=L\cdot\sqrt{2}.$$ y el área sería $(L\sqrt{2})^2=2L^2$

es decir, el doble del cuadrado inicial.

R12 Dibujo: VENTANA.



x = longitud del tramo horizontal
y = " " vertical.

ligadura: el área es $8\,m^2 \rightarrow \boxed{x \cdot y = 8}$

Función a optimizar: coste de la ventana: f.

$$\boxed{f} = 2x \cdot 2{,}5 + 2y \cdot 5 = \boxed{5x + 10y}.$$

Introducimos la ligadura en la función: $y = \dfrac{8}{x} \Rightarrow$

$$\boxed{f(x)} = 5x + 10 \cdot \frac{8}{x} = \boxed{5x + \frac{80}{x}}$$

Derivadas:

$$f'(x) = 5 - \frac{80}{x^2} \qquad f''(x) = \frac{160}{x^3}$$

Condición de extremo: $f' = 0 \rightarrow$

$$5 - \frac{80}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 5 = \frac{80}{x^2} \rightarrow x^2 = \frac{80}{5} = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

(se descarta la solución negativa porque x es una longitud)

$$f''(4) = \frac{160}{4^3} > 0 \rightarrow \text{mínimo.}$$

Solución:

Dimensiones $x = 4\,m \rightarrow y = \dfrac{8}{4} = 2\,m$

Coste $f = 5 \cdot 4 + 10 \cdot 2 = 40$ €.