

POTENCIAS DE MATRICES

Definición: la potencia de matrices, como la de números reales, es una operación relacionada con el producto:

$$\boxed{A^n = \overbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}^{n \text{ veces}}} \quad \text{con } A \in M_{n \times n}$$

Nota: Sólo se pueden aplicar la potenciación a las matrices cuadradas pues para multiplicar una matriz consigo mismo ha de tener mismo número de filas que de columnas.

Observación: la potencia de una matriz no coincide con los coeficientes elevados al

exponente de la potencia:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}^p \neq \begin{pmatrix} a_{11}^p & \dots & a_{1n}^p \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^p & \dots & a_{nn}^p \end{pmatrix}$$

Ejercicios típicos: muchas veces las potencias de matrices sencillas siguen un patrón repetitivo de forma que podemos expresar la potencia n-esima en función de n. Para calcular este patrón basta con calcular las potencias de primeras de la matriz y buscar la relación con el exponente. Veamos algunos casos:

1) El más sencillo si **A=Id** (identidad) $\rightarrow A^n = A = \text{Id}$. La demostración es sencilla no olvidemos que la matriz identidad multiplicada por cualquier otra matriz no la modifica ($A \cdot I = I \cdot A = A$). Así tendremos que $I^2 = I \cdot I = I$, $I^3 = I^2 \cdot I = I \cdot I = I \dots$

2) Si **A es una matriz diagonal**, siempre podemos ponerla en función de la I por una constante, calculando la potencia de forma sencilla. Veamos un ejemplo sencillo, $A \in M_{2 \times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}; \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$

luego $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Se puede llegar a este resultado a partir de la matriz identidad de

manera más fácil: $A^n = (3 \cdot I)^n = (3 \cdot I) \cdot (3 \cdot I) \cdot \dots \cdot (3 \cdot I) = 3^n \cdot I^n = 3^n \cdot I = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

3) En algunos casos la expresión de A^n depende de n de forma bastante sencilla y nos damos cuenta de su relación sin más que hacer las primeras potencias. Veamos un ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 15 & 1 \end{pmatrix} \dots \rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos que los coeficientes $a_{44}=1$ y $a_{12}=0$ siempre, y el coeficiente $a_{11}=2^n$ mientras $a_{21}=2^n-1$

3) En algunos casos las **potencias empiezan a repetirse**, esto ocurren cuando $A^p=I$, repitiéndose entonces cada vez que aumentemos la potencia en p unidades. Ejemplo:

$$\begin{array}{l|l}
 A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow & A^4 = I \cdot A = A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & A^5 = A^4 \cdot A = A \cdot A = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I & A^6 = A^5 \cdot A = A^2 \cdot A = A^3 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Vemos que cada vez que añadimos 3 unidades a la potencia el resultado vuelve a ser el mismo, así $A=A^4=A^7=A^{10}=\dots$, $A^2=A^5=A^8=\dots$, $A^3=A^6=A^9=A^{12}=\dots$. ¿Qué relación existe entre 1,5,7..., entre 2,5,8... y entre 3,6,9,...? Parece claro la diferencia entre dos de ellos consecutivos es 3, es decir todos tienen el mismo resto al dividir entre 3: $\text{resto}(1/3)=\text{resto}(4/3)=\text{resto}(7/3)=1$; $\text{resto}(2/3)=\text{resto}(5/3)=\text{resto}(8/3)=2$; $\text{resto}(3/3)=\text{resto}(6/3)=\text{resto}(9/3)=0$.

Conclusión:

$$A^n = \begin{cases} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } \text{resto}(n/3) = 1 \\
 \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } \text{resto}(n/3) = 2 \\
 I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } \text{resto}(n/3) = 0 \end{cases}$$

4) En el caso más complicado tenemos una mezcla de las opciones 2 y 3, es decir se repite pero la matriz no es exactamente igual sino que sigue un mismo patrón. Esto ocurre cuando una potencia de n es proporcional a la matriz identidad. Ejemplo:

$$\begin{array}{l|l}
 A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow & \\
 A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot Id & A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot Id \\
 A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} & A^5 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

En este caso el patrón de las matrices de p
impares.

Para las potencias pares vemos que siempre es proporcional a la identidad, es decir escalar: para $n=2$ el valor escalar es -2 , y para $n=4$ es 4 , si seguimos para $n=6$ será -8 ...que son potencias de $-2 \rightarrow$ si n es par $A^n = (-2)^{n/2} \cdot I$

Para las potencias impares tenemos que la diagonal secundaria es nula ($a_{12}=a_{21}=0$) mientras que el coeficiente a_{12} sigue el siguiente patrón: $n=1 \rightarrow a_{12}=-1$, $n=3 \rightarrow a_{12}=2$, $n=5 \rightarrow a_{12}=-4$...es

decir $a_{12} = -(-2)^{\frac{n-1}{2}}$, de forma análoga $a_{21} = (-2)^{\frac{n-1}{2}}$

$$A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} (-2)^{n/2} & 0 \\ 0 & (-2)^{n/2} \end{pmatrix} & \text{si } n = \text{par} \\ \begin{pmatrix} 0 & -(-2)^{\frac{n-1}{2}} \\ (-2)^{\frac{n-1}{2}} & 0 \end{pmatrix} & \text{si } n = \text{impar} \end{cases}$$