1) Sea la matriz A : $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$

a) Calcula A^n
b) Calcula $A^{20} - I + 2\cdot A^5$

a) Calcula A^n

- 1º Calculamos las primeras potencias de A:

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3\cdot A = \begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4\cdot A = \begin{pmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 5\\0 & 1\end{pmatrix}$$

- 2º Viendo los resultados calculamos la matriz enésima.

$$A^n = \begin{pmatrix}1 & n\\0 & 1\end{pmatrix}$$

- 3º Comprobamos el resultado para la siguiente potencia A^{n+1}

$$A^{n+1} = A^n\cdot A = \begin{pmatrix}1 & n\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & n+1\\0 & 1\end{pmatrix}$$

b) Calcula $A^{20} - I + 2\cdot A^5$

$$A^n = \begin{pmatrix}1 & n\\0 & 1\end{pmatrix} \qquad A^{20} = \begin{pmatrix}1 & 20\\0 & 1\end{pmatrix} \qquad A^5 = \begin{pmatrix}1 & 5\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{20} - I + 2\cdot A^5 = \begin{pmatrix}1 & 20\\0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1 & 5\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 30\\0 & 2\end{pmatrix}$$

2) Siendo A la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla A^n para cada número natural n.

b) Calcular $A^{22} - 12 \cdot A^2 + 2A$

a) Halla A^n para cada número natural n.

- 1º : Calculamos las primeras potencias de A:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 2º Viendo los resultados calculamos la matriz enésima.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 3º Comprobamos el resultado para la siguiente potencia An+1

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1) \cdot a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos $A^{22} - 12 \cdot A^2 + 2A$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{22} = \begin{pmatrix} 1 & 22a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{22} - 12 \cdot A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & 22a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 12 \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} = -9 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -9 \cdot I$$

3) Siendo A la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla A^n para cada número natural n.

b) Calcular A^{49}

a) Halla A^n para cada número natural n.

- 1º : Calculamos las primeras potencias de A:

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4/7 & 4/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 2º Viendo los resultados calculamos la matriz enésima.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 3º Comprobamos el resultado para la siguiente potencia A^{n+1}

$$A^{n+1} = A^n\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)/7 & (n+1)/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos A^{49}

$$A^{49} = \begin{pmatrix} 1 & 49/7 & 49/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Consideramos las siguientes matrices: A= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de x e y para que se cumpla la siguiente igualdad A·B=B·A

b) Halla A^{2005} y A^{2006}

a) Determina los valores de x e y para que se cumpla la siguiente igualdad A·B=B·A

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$$ Igualamos las matrices → $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

b) Halla A^{2005} y A^{2006}

- 1º : Calculamos las primeras potencias de A:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

- 2º Viendo los resultados calculamos la matriz enésima.

$$A^n = \begin{cases} I & si\ n\ es\ par \\ A & si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

Calculamos $A^{2006} = I$ (ya que 2006 es par) = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos $A^{2005} = A$ (ya que 2005 es impar) = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5) Calcula A^n para todo valor de n entero positivo, siendo A la siguiente matriz $A=\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

a) Calculamos A^n

- 1º : Calculamos las primeras potencias de A:

$$A^2 = A\cdot A=\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & a^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 0 & a^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

- 2º Viendo los resultados calculamos la matriz enésima.

$$A^n = \begin{cases} A \;\; si\; n = 1\\ A^2 \;\; si\; n = 2\\ 0 \;\; si\; n \geq 3\end{cases}$$

6) Calcula A^n de la siguiente matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

- 1º : Calculamos las primeras potencias de A:

$$A^2= A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 7\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 7\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 15\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 16\end{pmatrix}$$

- 2º Viendo los resultados calculamos la matriz enésima.

$$A^n = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{n} & \mathbf{2^n - 1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2^n} \end{pmatrix}$$

- 3º Comprobamos el resultado para la siguiente potencia A^{n+1}

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+n & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

7) Consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Se pide:

a) Demuestra que se verifica la igualdad $A^3 + I = 0$, siendo I la matriz unidad y 0 la matriz nula.

b) Calcula A^{10}

a) Demuestra que se verifica la igualdad $A^3 + I = 0$

- 1º : Calculamos las primeras potencias de A:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = - I$$

$A^3 + I = 0 \rightarrow - I + I = 0$ vemos que se verifica la igualdad.

b) $A^{10} = A^9 \cdot A = (A^3)^3 \cdot A = (-I)^3 \cdot A = - I \cdot A = - A = - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$