

MATRICES - DETERMINANTES

1. Dada la matriz $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula $M = P^2 - 3P - 2I_2$

Solución:

$$P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \quad 3P = 3 \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M = P^2 - 3P - 2I_2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Determina a y b de forma que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique $A^2 = A$

Solución:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a & -2-b \\ 2a+ab & -a+b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \mapsto \begin{pmatrix} 4-a & -2-b \\ 2a+ab & -a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} 4-a=2 & \mapsto \boxed{a=2} \\ -2-b=-1 & \mapsto \boxed{b=-1} \\ 2a+ab=a & \mapsto 4-2=2 \\ -a+b^2=b & \mapsto -2+1=-1 \end{cases}$$

$$\mathbf{3. Dada la matriz } A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \text{ calcula } A^2, A^3, \dots, A^{128}$$

Solución:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Teniendo en cuenta que $A^3 = I$ se tiene:

$$A^{128} = A^{3 \cdot 42 + 2} = (A^3)^{42} \cdot A^2 = I^{42} \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{4. Resuelve } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2x \\ 3y - 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} x - y = 3 + 2x \\ 3x + 2y = 3y - 2 \end{cases} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{cases} x + y = -3 \\ 3x - y = -2 \end{cases} \mapsto x = \frac{-5}{4}, y = \frac{-7}{4}$$

5. Determina las matrices A y B que son solución del siguiente sistema matricial:

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad 2A + B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Denotando $X = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ se tiene:

$$\begin{cases} 3A - 2B = X \\ 2A + B = Y \end{cases} \mapsto \begin{cases} 3A - 2B = X \\ 4A + 2B = 2Y \end{cases} \mapsto 7A = X + 2Y$$

$$A = \frac{1}{7}(X + 2Y) = \frac{1}{7} \left[\begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix} \right] =$$
$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ -7 & 21 & 14 \\ 35 & -14 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2A + B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix} \mapsto B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese A^{-1}

b) Resuélvase el sistema de ecuaciones: $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A| = |A^t| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{11}^t = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (-)A_{12}^t = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{13}^t = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$(-)A_{21}^t = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{22}^t = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad (-)A_{23}^t = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31}^t = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (-)A_{32}^t = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{33}^t = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto A^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=1 \end{cases}$$

7. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

a) Determinar el valor de x para que se verifique $B^2 = A$

b) Calcular el valor de x para que $B + C = A^{-1}$

c) Calcular el valor de x para que se verifique $A - B + \frac{1}{2}C = 3I$

Solución:

$$a) B^2 = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+x^2 & 3x \\ 3x & x^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4+x^2=5 & \mapsto x=\pm 1 \\ 3x=3 & \mapsto x=1 \\ x^2+1=2 & \mapsto x=\pm 1 \end{cases} \mapsto x=1$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \mapsto A^t = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \mapsto |A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B + C = A^{-1} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & x-1 \\ x-1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$x-1=-3 \mapsto x=-2$$

$$c) A - B + \frac{1}{2}C = 3I \mapsto B = A + \frac{1}{2}C - 3I$$

$$\begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5/2 \\ 5/2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto x = \frac{5}{2}$$

8. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ k & 2 \end{pmatrix}$

a) Razonar para qué valores de k la matriz $B^t A^t$ tiene inversa.

b) Resolver la ecuación $(AB)^t X = I$ para $k=0$

Solución:

$$a) A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto A^t = \begin{pmatrix} -1 & k \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ k & 2 \end{pmatrix} \mapsto B^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & k \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = B^t A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & k \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & k \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k-1 & k \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } |C| \neq 0 \mapsto \exists C^{-1} \equiv \begin{vmatrix} 2k-1 & k \\ 3 & k+2 \end{vmatrix} = 2k^2 - 2 \neq 0 \mapsto k \neq \pm 1$$

La matriz C tiene inversa para $\forall k \neq \pm 1$

$$b) (AB)^t X = I \mapsto X = [(AB)^t]^{-1} \cdot I = [(AB)^t]^{-1} = [B^t A^t]^{-1} = C^{-1} \quad \boxed{X = C^{-1}}$$

$$\text{Para } k=0: C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \mapsto C^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} C_{11}^t = 2 & -C_{12}^t = 0 \\ -C_{21}^t = -3 & C_{22}^t = -1 \end{cases}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \mapsto X = C^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

9. ¿Para qué valores de x se anulan los determinantes siguientes?

$$\text{a) } \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0 \quad \text{c) } \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = x \cdot x^3 - 1 = x^4 - 1 = 0$$

$$x^4 - 1 = 0 \mapsto x = \pm \sqrt[4]{1} \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & x-b & 0 \\ 0 & 0 & x-c \end{vmatrix} = a \cdot (x-b) \cdot (x-c) = 0 \begin{cases} x = b \\ x = c \end{cases} \quad \text{con } a \neq 0$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} \stackrel{C_1+C_2}{=} \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 & 1 \\ 0 & -1 & x & 1 \\ 0 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ -1 & x & 1 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1) \cdot (x^3 + 1 + x - x) = (x-1) \cdot (x^3 + 1) = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x^3 + 1 = 0 \mapsto x = -1 \end{cases}$$

10. Estudia el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de a, b y c:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|M| = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3} \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = 5 \cdot (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = 0 \mapsto \text{rango}(M) \leq 2$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \mapsto \begin{cases} \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ a & b \end{vmatrix} = 5b - 5a = 0 \mapsto b = a \\ \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ a & c \end{vmatrix} = 5c - 5a = 0 \mapsto c = a \\ \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ b & c \end{vmatrix} = 5c - 5b = 0 \mapsto c = b \end{cases}$$

- Si $a=b=c \Rightarrow \text{rango}(M)=1$
- Si $a \neq b$ o $a \neq c$ o $b \neq c \Rightarrow \text{rango}(M)=2$

11. Demuestra, sin desarrollar el determinante, que: $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{C_1-C_3 \\ C_2-C_3}} \begin{vmatrix} a^2-b^2 & ab-b^2 & b^2 \\ 2(a-b) & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a+b)(a-b) & b(a-b) & b^2 \\ 2(a-b) & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)(a-b) \begin{vmatrix} a+b & b & b^2 \\ 2 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(a-b) \begin{vmatrix} a+b & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{C_1 - C_2}{=} (a-b)(a-b) \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

12. Calcula una matriz X que conmuta con la matriz A , esto es,

$$A \cdot X = X \cdot A, \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ y calcula } A^2 + 2A^{-1}X$$

Solución:

$$\text{Sea } X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \\ X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$A \cdot X = X \cdot A \mapsto \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} a+c=a \\ b+d=a+b \\ d=c+d \end{cases} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{cases} c=0 \\ d=a \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \mapsto A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2A^{-1}X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2a & 2+2b-2a \\ 0 & 1+2a \end{pmatrix} \text{ La matriz obtenida también conmuta con la matriz } A$$

13. Calcula la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_4 - 3F_1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 9 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 - 2C_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 - 2C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \mapsto \exists A^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

• Adjuntos de la matriz traspuesta A^t :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \quad (-) \begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -9 \quad (-) \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$(-) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 \quad (-) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -14 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad (-) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7 \quad (-) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$(-) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \quad (-) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A^t) = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -5 & 6 & -9 & -1 \\ -6 & 12 & -14 & 2 \\ 3 & -10 & 7 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 & -6 & 9 & 1 \\ 6 & -12 & 14 & -2 \\ -3 & 10 & -7 & 1 \\ -3 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

14. Determina si las siguientes ecuaciones tienen solución y hállala si es posible:

$$\text{a) } X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\text{a) } X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \boxed{X = B \cdot A^{-1} = A^{-1}} \text{ tiene solución si } |A| \neq 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \text{ tiene solución}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} A_{11}^t = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -11 & -A_{12}^t = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 12 & A_{13}^t = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -4 \\ -A_{21}^t = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -4 & A_{22}^t = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 & -A_{23}^t = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -4 \\ A_{31}^t = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 & -A_{32}^t = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 & A_{33}^t = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{cases}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj } A^t) = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 11 & -12 & 4 \\ 4 & -5 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = B \cdot A^{-1} \mapsto X = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & -12 & 4 \\ 4 & -5 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 11 & -12 & 4 \\ 4 & -5 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}^A X = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}^B \mapsto \boxed{X = A^{-1} \cdot B} \text{ tiene solución si } |A| \neq 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \mapsto \text{No existe inversa, } A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj } A^t)$$

La ecuación no tiene solución.

$$\text{c) } \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_A X = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_B \mapsto \boxed{X = A^{-1} \cdot B} \text{ tiene solución si } |A| \neq 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \text{ tiene solución}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} A_{11}^t = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 & -A_{12}^t = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 & A_{13}^t = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \\ -A_{21}^t = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -6 & A_{22}^t = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 & -A_{23}^t = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \\ A_{31}^t = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 & -A_{32}^t = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 & A_{33}^t = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \end{cases}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj } A^t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B \mapsto X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 5/4 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

15. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

donde λ es cualquier número real.

- a) Encuentra los valores de λ para los que $A \cdot B$ es invertible
- b) Determina los valores de λ para los que $B \cdot A$ es invertible
- c) Dados a y b , números reales cualesquiera, ¿puede ser el siguiente sistema compatible determinado?

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Solución:

$$a) A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix} = (1+2\lambda) - (3+2\lambda) \cdot (1-\lambda) = 2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \quad \mapsto \quad \begin{cases} \lambda = 1/2 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

$$A \cdot B \text{ es invertible } \forall \lambda \in \mathbb{R} - \left\{ -2, \frac{1}{2} \right\}$$

$$b) B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \lambda-3 \\ \lambda & 2\lambda & \lambda^2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|B \cdot A| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & \lambda-3 \\ \lambda & 2\lambda & \lambda^2 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 4 & -1 & \lambda-3 \\ 1 & 2 & \lambda \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 2\lambda \begin{vmatrix} 4 & -1 & \lambda-3 \\ 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Siendo $|B \cdot A| = 0 \mapsto B \cdot A$ no es invertible

$$c) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda & | & a \\ 1 & -1 & -1 & | & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \mapsto \text{rango}(A) = \text{rango}(A') = 2 < \text{n}^\circ \text{ incógnitas}$$

El sistema es compatible indeterminado, para cualquier valor de a y b.
En consecuencia, no puede ser compatible determinado.

16. a) Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tiene un determinante n, averigua el valor del determinante de las siguiente matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{pmatrix}$$

b) Se considera la función: $f(x) = \begin{vmatrix} a & b & -2a & 3b \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$

Sabiendo que $f(0) = -3$ y $f(1) = f(-1)$, determinar a y b.

Solución:

$$a) |A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = n$$

$$\begin{aligned} \bullet |B| &= \begin{vmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1 \mapsto F_3} - \begin{vmatrix} 9a & 6b & 3c \\ 3g & 2h & i \\ 6d & 4e & 2f \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 \mapsto F_3} \begin{vmatrix} 9a & 6b & 3c \\ 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 9a & 6b & 3c \\ 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3a & 2b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & 2h & i \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \boxed{36n}$$

$$\bullet |C| = \begin{vmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 \mapsto F_1} - \begin{vmatrix} a+c & b & c+b \\ d+f & e & f+e \\ g+i & h & i+h \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 - C_2} - \begin{vmatrix} a+c & b & c \\ d+f & e & f \\ g+i & h & i \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 - C_3} =$$

$$\xrightarrow{C_1 - C_3} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \boxed{-n}$$

$$b) f(x) = \begin{vmatrix} a & b & -2a & 3b \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} \quad f(0) = -3 \quad y \quad f(1) = f(-1)$$

$$\bullet f(0) = \begin{vmatrix} a & b & -2a & 3b \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3b \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3b = -3 \mapsto \boxed{b = -1}$$

De otra parte,

$$f(1) = \begin{vmatrix} a & -1 & -2a & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1 + 3F_4} = \begin{vmatrix} a & -1 & -2a-3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -1 & -2a-3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -a-4$$

$$f(-1) = \begin{vmatrix} a & -1 & -2a & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1 - 3F_4} = \begin{vmatrix} a & -1 & -2a+3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & -1 & -2a+3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = a-4$$

$$\bullet f(1) = f(-1) \Leftrightarrow -a-4 = a-4 \mapsto \boxed{a=0}$$

17. a) Comprobar que la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ cumple que $A^3 = -A - I$

y calcular la matriz inversa de A.

b) Si A es cualquier matriz con n filas y n columnas tal que $A^3 = -A - I$ y se sabe que $\det(A) = m$, calcular el valor del determinante de $A + I$ en función de m.

Solución:

$$a) A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\otimes A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\otimes -A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Queda probado que $A^3 = -A - I$

• Para calcular la matriz inversa de A se utiliza que $A^3 = -A - I$

$$A \cdot A^2 = -A - I \mapsto A^{-1} \cdot A \cdot A^2 = A^{-1} \cdot (-A - I) \mapsto A^2 = A^{-1} \cdot (-A - I) \mapsto$$

$$\mapsto A^2 = -I - A^{-1} \mapsto \boxed{A^{-1} = -I - A^2}$$

$$A^{-1} = -I - A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) A^3 = -A - I \mapsto A^3 = -(A + I) \mapsto -A \cdot A \cdot A = (A + I) \mapsto$$

$$\mapsto -|A| \cdot |A| \cdot |A| = |A + I| \mapsto |A + I| = -|A|^3 = -m^3$$

18. Sean A, B y X tres matrices cuadradas del mismo orden que verifican la relación $A \cdot X \cdot B = I$, siendo I la matriz unidad.

a) Si el determinante de A vale -1 y el de B vale 1 , calcular razonadamente el determinante de X.

b) Calcular de forma razonada la matriz de X si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Solución:

$$a) A \cdot X \cdot B = I \mapsto \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{I} = A^{-1} \cdot I \cdot B^{-1} \mapsto X = A^{-1} \cdot I \cdot B^{-1} \mapsto X = A^{-1} \cdot B^{-1}$$

$$X = A^{-1} \cdot B^{-1} \mapsto |X| = |A^{-1} \cdot B^{-1}| = |A^{-1}| \cdot |B^{-1}| = \frac{1}{|A|} \cdot \frac{1}{|B|} = \frac{1}{-1 \cdot 1} = -1$$

$$b) X = A^{-1} \cdot B^{-1} = (B \cdot A)^{-1}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \mapsto |B \cdot A| = \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = -1$$

$$X = (B \cdot A)^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

19. Para una matriz cuadrada, se define una traza como la suma de los elementos de la diagonal principal. En lo que sigue, A y B son matrices cuadradas 2×2 .

a) Comprobar que se verifica: $\text{Traza}(A + B) = \text{Traza}(A) + \text{Traza}(B)$

b) Comprobar que $\text{Traza}(AB) = \text{Traza}(BA)$

c) Utilizando los resultados anteriores, demostrar que es imposible tener $AB - BA = I$, donde I denota la matriz identidad.

d) Encontrar dos matrices A y B para las que: $\text{Traza}(AB) \neq \text{Traza}(A) \cdot \text{Traza}(B)$

Solución:

$$a) \text{ Sea } A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{matrix} \text{Traza } A = a_1 + a_4 \\ \text{Traza } B = b_1 + b_4 \end{matrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Traza}(A+B) = a_1 + b_1 + a_4 + b_4 = (a_1 + a_4) + (b_1 + b_4) = \text{Traza}(A) + \text{Traza}(B)$$

$$b) \begin{cases} A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_3 & a_1 b_2 + a_2 b_4 \\ a_3 b_1 + a_4 b_3 & a_3 b_2 + a_4 b_4 \end{pmatrix} \\ B \cdot A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 a_1 + b_2 a_3 & b_1 a_2 + b_2 a_4 \\ b_3 a_1 + b_4 a_3 & b_3 a_2 + b_4 a_4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Traza}(A \cdot B) &= a_1 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_3 + a_4 b_4 \\ \text{Traza}(B \cdot A) &= b_1 a_1 + b_2 a_3 + b_3 a_3 + b_4 a_4 \end{aligned} \quad \mapsto \quad \text{Traza}(A \cdot B) = \text{Traza}(B \cdot A)$$

c) Suponiendo que fuera cierto que $AB - BA = I \mapsto AB = I + BA$

Siendo $\text{Traza}(A+B) = \text{Traza}(A) + \text{Traza}(B)$, se tendría:

$$\text{Traza}(AB) = \text{Traza}(I) + \text{Traza}(BA) = 2 + \text{Traza}(BA)$$

Contradiciendo el resultado $\text{Traza}(A \cdot B) = \text{Traza}(B \cdot A)$ que afirma que las trazas de las matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$ son iguales.

$$d) \text{ Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{aligned} \text{Traza } A &= 1+1=2 \\ \text{Traza } B &= 0+0=0 \end{aligned}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \text{Traza}(A \cdot B) = 1$$

Resultando que $\text{Traza}(A \cdot B) = 1 \neq \text{Traza}(A) \cdot \text{Traza}(B) = 0$

20. Determina una matriz A simétrica sabiendo que:

$$\det(A) = -7 \text{ y } A \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$a) \text{ Sea } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\bullet \text{ Por simetría } A = A^t \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow b = c$$

- $\det(A)=7 \mapsto \begin{vmatrix} a & b \\ b & d \end{vmatrix}=7 \Rightarrow ad-b^2=7$

- $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mapsto$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 2a-b & 6a-3b \\ 2b-d & 6b-3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} 2a-b=-4 \\ 2b-d=1 \\ 6a-3b=-12 \\ 6b-3d=3 \end{cases}$$

$$\text{Resolviendo el sistema} \equiv \begin{cases} 2a-b=-4 \mapsto a=\frac{-4+b}{2} \\ 2b-d=1 \mapsto d=2b-1 \\ ad-b^2=7 \mapsto \left(\frac{-4+b}{2}\right)(2b-1)-b^2=7 \end{cases}$$

$$-8b+4+2b^2-b-2b^2=14 \mapsto b=-\frac{10}{9} \mapsto \begin{cases} a=\frac{-4-\frac{10}{9}}{2}=-\frac{46}{18}=-\frac{23}{9} \\ d=2\left(-\frac{10}{9}\right)-1=-\frac{29}{9} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{23}{9} & -\frac{10}{9} \\ -\frac{10}{9} & -\frac{29}{9} \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 23 & 10 \\ 10 & 29 \end{pmatrix}$$