

1. Una empresa fabrica juguetes de tres tipos diferentes T_1 , T_2 y T_3 . El precio de coste de cada juguete y los ingresos que obtiene la empresa por cada juguete vendido vienen dados por la siguiente tabla:

	T_1	T_2	T_3
Precio de coste	4 €	6 €	9 €
Ingreso	10 €	16 €	24 €

El número de ventas anuales es de 4500 juguetes T_1 , 3500 juguetes T_2 y 1500 juguetes T_3 . Sabiendo que la matriz de costes (C) y la matriz de ingresos (I) son matrices diagonales y que la matriz de ventas anuales (V) es una matriz fila.

a) Determina las matrices C, I y V.

b) Obtén, utilizando las matrices anteriores, la matriz de costes anuales, la matriz de ingresos anuales, y la matriz de beneficios anuales, correspondientes a los tres tipos de juguetes.

Solución:

a) Matriz de ventas: $V = (4500 \quad 3500 \quad 1500)$

Matriz de costes: $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

Matriz de ingresos: $I = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$

b) Costes anuales:

$$V \cdot C = (4500 \quad 3500 \quad 1500) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= (4 \cdot 4500 \quad 6 \cdot 3500 \quad 9 \cdot 1500) = (18000 \quad 21000 \quad 13500)$$

Ingresos anuales:

$$V \cdot I = (4500 \quad 3500 \quad 1500) \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} =$$

$$= (10 \cdot 4500 \quad 16 \cdot 3500 \quad 24 \cdot 1500) = (45000 \quad 56000 \quad 36000)$$

Beneficios anuales:

$$VC - VI = (45000 \quad 56000 \quad 36000) - (18000 \quad 21000 \quad 13500) =$$

$$= (27000 \quad 35000 \quad 22500)$$

Los beneficios anuales son de 27000 euros por la venta de los juguetes T_1 ; 35000 euros por la venta de los juguetes T_2 y 22500 euros por la venta de los juguetes T_3 .

2. Un almacén de ruedas de vehículos de diferentes tipos tiene en *stock* los componentes (en cientos de unidades) dados por la tabla siguiente:

	Neumáticos	Embellecedores	Llantas
Utilitarios	3,1	0,3	2,1
Berlinas	1,6	1,1	0,6
Todo terreno	0,9	0	0,2

La cantidad de quilos de materia prima necesaria para cada componente es:

	Acero	Caucho
Neumáticos	0,1	4,6
Embellecedores	1	0,05
Llantas	5	0

- Calcula el total de acero acumulado en el almacén.
- Calcula la cantidad de caucho acumulado en el almacén.

Solución:

a) Cantidad de acero: (Unidades de vehículos $\times$ quilos de acero)

$$\text{Utilitarios: } 310 \cdot 0,1 + 30 \cdot 1 + 210 \cdot 5 = 1111$$

$$\text{Berlinas: } 160 \cdot 0,1 + 110 \cdot 1 + 60 \cdot 5 = 426$$

$$\text{Todo terreno: } 90 \cdot 0,1 + 0 \cdot 1 + 20 \cdot 5 = 109$$

$$\text{Total: } 1111 + 426 + 109 = 1646 \text{ kg}$$

b) Cantidad de caucho: (Unidades de vehículos $\times$ quilos de caucho)

$$\text{Utilitarios: } 310 \cdot 4,6 + 30 \cdot 0,05 + 210 \cdot 0 = 1427,5$$

$$\text{Berlinas: } 160 \cdot 4,6 + 110 \cdot 0,05 + 60 \cdot 0 = 741,5$$

$$\text{Todo terreno: } 90 \cdot 4,6 + 0 \cdot 0,05 + 20 \cdot 0 = 414$$

$$\text{Total: } 1427,5 + 741,5 + 414 = 2583 \text{ kg}$$

NOTA: Las cantidades anteriores pueden obtenerse mediante cálculo matricial así:

$$\text{Matriz de vehículos: } V = \begin{pmatrix} 310 & 30 & 210 \\ 160 & 110 & 60 \\ 90 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz de materias primas: } M = \begin{pmatrix} 0,1 & 4,6 \\ 1 & 0,05 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz de cantidades de acero y caucho: } V \cdot M = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{acero} & \text{caucho} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1111 & 1427,5 \\ 426 & 741,5 \\ 109 & 414 \end{matrix} \\ \text{Total} & \begin{matrix} 1646 & 2583 \end{matrix} \end{matrix}$$

3. Un importador de globos los importa de dos colores: de color naranja (N) y de color fresa (F). Todos ellos se envasan en paquetes de 2, 5 y 10 unidades, que vende a los siguientes precios (en pesetas):

	2 unidades	5 unidades	10 unidades
Color N	4	8	12
Color F	3	5	8

Sabiendo que en un año se venden el siguiente número de paquetes,

	Color N	Color F
De 2 unidades	700000	50000
De 5 unidades	600000	40000
De 10 unidades	500000	500000

se pide:

- Resume la información anterior en dos matrices A y B: A será una matriz 2×3 que recoja las ventas en un año y B una matriz 3×2 que recoja los precios.
- Calcula los elementos de la diagonal principal de la matriz A por B y dar su significado.
- Calcula los elementos de la diagonal principal de la matriz B por A y dar su significado

Solución:

$$\text{a) Matriz de ventas: } A = \begin{pmatrix} 700000 & 600000 & 500000 \\ 50000 & 40000 & 500000 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz de precios: } B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } AB = \begin{pmatrix} 700000 & 600000 & 500000 \\ 50000 & 40000 & 500000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13600000 & 9100000 \\ 6520000 & 4350000 \end{pmatrix} = C$$

El elemento $c_{11} = 13600000$ da los ingresos por venta de los globos de color naranja.

El elemento $c_{22} = 4350000$ da los ingresos por venta de los globos de color fresa.

$$\text{c) } BA = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 700000 & 600000 & 500000 \\ 50000 & 40000 & 500000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2950000 & 2520000 & 3500000 \\ 5850000 & 5000000 & 6500000 \\ 8800000 & 7520000 & 10000000 \end{pmatrix} = D$$

El elemento $d_{11} = 2950000$ da los ingresos por venta de los globos envasados de dos en dos (de ambos colores).

El elemento $d_{22} = 5000000$ da los ingresos por venta de los paquetes de 5 unidades.

El elemento $d_{33} = 10000000$ da los ingresos por venta de los paquetes de 10 unidades.

Nota: Puede observarse que la suma de los elementos de ambas diagonales es la misma: 17950000 pta.

4. En una clínica dental colocan tres tipos de prótesis, P_1 , P_2 y P_3 , en dos modelos diferentes, M_1 y M_2 . El número de prótesis que tienen ya construidas viene dado en la matriz A. El precio, en euros, de cada prótesis viene dado en la matriz B

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} M_1 & M_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 16 & 12 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} & \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 150 & 160 & 240 \\ 210 & 190 & 220 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- Obtener, si es posible, las matrices $C = A \cdot B$ y $D = B \cdot A$
- ¿Qué información proporcionan los elementos c_{12} de la matriz C y el elemento d_{22} de D?
- ¿Qué elemento de C o de D proporciona el valor total de todas las prótesis del tipo P_2 ?

Solución:

$$a) C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 16 & 12 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 150 & 160 & 240 \\ 210 & 190 & 220 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6060 & 5750 & 7260 \\ 4920 & 4840 & 6480 \\ 4290 & 4100 & 5240 \end{pmatrix}$$

$$D = B \cdot A = \begin{pmatrix} 150 & 160 & 240 \\ 210 & 190 & 220 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 16 & 12 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6370 & 8430 \\ 7330 & 9770 \end{pmatrix}$$

- $c_{12} = 11 \cdot 160 + 21 \cdot 190 = 5750$ no proporciona ninguna información válida, pues multiplica el número de prótesis P_1 con los precios de las prótesis P_2 .

$d_{22} = 210 \cdot 21 + 190 \cdot 12 + 220 \cdot 14 = 9770$ da el precio de todas las prótesis (P_1 , P_2 y P_3) del modelo M_2 .

- El precio de todas las prótesis del tipo $P_2 = 16 \cdot 160 + 14 \cdot 190 = 4840$ es el elemento c_{22} .

5. Tres personas van a una pescadería. La primera compra 1 kg de salmonetes y 2 de calamares, la segunda compra 2 kg de salmonetes, 1 de calamares y 1 kg de sardinas, y la tercera compra 1 kg de salmonetes y 3 de calamares.

- Dar una matriz 3×3 que exprese el número de kg de salmonetes, de calamares y de sardinas que ha comprado cada una de las tres personas.
- Si en esa compra la primera persona ha gastado un total de 59 euros, la segunda un total de 47 euros y la tercera un total de 84 euros, ¿qué vale un kg de salmonetes, qué vale un kg de calamares y qué vale un kg de sardinas?

Solución:

a) Una posibilidad es la siguiente:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & C & S \\ 1^a & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ 2^a & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ 3^a & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

b) Sean x , y , z los precios de un kg de salmonetes, calamares y sardinas, respectivamente. Se tendrá el sistema

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 59 \\ 2x + y + z = 47 \\ x + 3y = 84 \end{array} \right\}$$

Si a la primera ecuación se le resta la tercera, se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 59 \\ 2x + y + z = 47 \\ y = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{(Sustituyendo)} \quad x = 9; \quad z = 4$$

Luego los salmonetes están a 9 euros el kg, los calamares a 25 y las sardinas a 4 euros el kg.

NOTA: Matricialmente, el sistema tiene la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59 \\ 47 \\ 84 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 59 \\ 47 \\ 84 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 59 \\ 47 \\ 84 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 25 \\ 4 \end{pmatrix}$$

6. En la siguiente tabla se indica la audiencia prevista (en miles de espectadores) por tres cadenas de TV (A, B, C) en una determinada semana y en cada uno de los tres segmentos horarios (Mañana: M, Tarde: T y Noche: N)

	A	B	C
M	40	60	20
T	60	40	30
N	100	80	90

Sin embargo, como consecuencia de la calidad de los programas emitidos, se produce en la audiencia prevista (y en todos los segmentos horarios) una reducción del 10 % para la cadena A, una reducción del 5 % para la cadena B y un aumento del 20 % para la cadena C.

- Obtener la matriz que representa la nueva audiencia de las tres cadenas A, B y C, en los tres segmentos horarios M, N y T.
- Sabiendo que el beneficio que obtiene cada cadena por espectador es de 3 euros por la mañana, de 4 euros por la tarde y de 6 euros por la noche, obtener mediante cálculo matricial los beneficios para cada una de las cadenas.

Solución:

a)

Cadena A: conserva el 90 % de la audiencia → hay que multiplicar por 0,90

Cadena B: conserva el 95 % de la audiencia → hay que multiplicar por 0,95

Cadena C: consigue 20 % más → hay que multiplicar por 1,20

La nueva audiencia se obtiene multiplicando las matrices:

$$\begin{pmatrix} 40 & 60 & 20 \\ 60 & 40 & 30 \\ 100 & 80 & 90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,90 & 0 & 0 \\ 0 & 0,95 & 0 \\ 0 & 0 & 1,20 \end{pmatrix} = \begin{matrix} M \\ T \\ N \end{matrix} \begin{matrix} A & B & C \\ \begin{pmatrix} 36 & 57 & 24 \\ 54 & 38 & 36 \\ 90 & 76 & 108 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

b) El beneficio será:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 36 & 57 & 24 \\ 54 & 38 & 36 \\ 90 & 76 & 108 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 864 & 779 & 864 \end{pmatrix}$$

El beneficio para la cadena A será de 864000 €; para la cadena B de 779000 €; para la cadena C de 864000 €.