Propiedades de las funciones derivables. Teoremas de Rolle y del valor medio

43. ¿Verifica la función $f(x) = x^2 - 2x + 3$ el teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 3]$? En caso afirmativo halla el punto que afirma el teorema.

Solución:

Es obvio que la función es continua y derivable en el intervalo dado; además, $f(-1) = 6$ y $f(3) = 6$.

Por tanto, verifica el teorema de Rolle y, en consecuencia, existe un punto $c \in (-1, 3)$ tal que $f'(c) = 0$.

Efectivamente, derivando $f'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$. Esto es, $c = 1$.

Observación: Como la función dada es una parábola, la abscisa hallada es la del vértice.

44. (Propuesto en Selectividad)

¿Se verifica el teorema de Rolle para la función $f(x) = |2x - 3| - 7$, $-2 \leq x \leq 5$?

Solución:

La función es continua y toma valores iguales en los extremos del intervalo:

$$f(-2) = f(5) = 0.$$

Pero, como no es derivable en el intervalo dado (en concreto en $x = 3/2$), no satisface las condiciones exigidas por el teorema.

45. Halla el punto que verifica el teorema del valor medio para la función $f(x) = x^3 - 3x$, en el intervalo $[-2, 0]$.

Solución:

La función es continua y derivable en el intervalo dado. Por tanto, existe un punto $x \in (-2, 0)$ tal que:

$$\frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = f'(x) \Rightarrow \frac{0 - (-2)}{2} = 3x^2 - 3 \Rightarrow 3x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

El punto buscado es $x = -\frac{2}{\sqrt{3}} \in (-2, 0)$.

46. Halla el punto que verifica el teorema del valor medio para la función $f(x) = \frac{1}{x}$, en el intervalo $(a, 2a)$, $a \neq 0$. Concrétalo cuando $a = 2$.

Solución:

Es obvio que la función es continua y derivable en el intervalo dado (La función está definida para todo $x \neq 0$). Por tanto, existe un punto $c \in (a, 2a)$ tal que:

$$\frac{f(2a) - f(a)}{2a - a} = f'(c) \Rightarrow \frac{1/2a - 1/a}{a} = \frac{-1}{c^2} \Rightarrow \frac{-1}{2a^2} = \frac{-1}{c^2} \Rightarrow c^2 = 2a^2 \Rightarrow c = a\sqrt{2}.$$

Si $a = 2$, el intervalo es $(2, 4)$, y $c = 2\sqrt{2}$.

47. (Propuesto en Selectividad)

Aplica el teorema del valor medio a la función $f(x) = \ln x$ en el intervalo $(1, e^2)$, determinando el valor de c , $1 < c < e^2$, para el que se verifica dicho teorema.

Solución:

La función es continua y derivable en el intervalo dado; por tanto, se cumple que existe un punto $c \in (1, e^2)$ tal que:

$$\frac{f(e^2) - f(1)}{e^2 - 1} = f'(c) \Rightarrow \frac{\ln e^2 - \ln 1}{e^2 - 1} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{2}{e^2 - 1} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{e^2 - 1}{2}.$$

Ese es el valor de c .

48. Demuestra que el valor que verifica el teorema del valor medio para $f(x) = x^2 - ax + 3$, en el intervalo $(1, 4)$, no depende de a . ¿Cuál es ese valor?

Solución:

Hay que hallar el valor de $x \in (1, 4)$ que verifica: $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = f'(x)$.

Por tanto:

$$\frac{19 - 4a - (4 - a)}{3} = 2x - a \Rightarrow \frac{15 - 3a}{3} = 2x - a \Rightarrow 15 - 3a = 6x - 3a \Rightarrow x = \frac{5}{2}, \text{ que,}$$

obviamente, no depende de a .

49. (Propuesto en EBAU 2018, Navarra)

Demuestra que existe $\alpha \in (0, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 1$, siendo

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi + \pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \ln(2e^x + 2x - x^2).$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

Solución:

La función dada es continua en el intervalo cerrado $[0, 2]$ y derivable en el abierto $(0, 2)^*$.

Por tanto, cumple el teorema del valor medio (incrementos finitos; de Lagrange), que dice:

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces existe algún punto $\alpha \in (a, b)$ tal

que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\alpha)$.

Como:

$$f(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(0) \cdot \ln(2e^0) = 1 \cdot 1 \cdot \ln 2 = \ln 2;$$

$$f(2) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos(\pi) \cdot \ln(2e^2 + 2 \cdot 2 - 4) = -1 \cdot (-1) \ln(2e^2) = \ln(2e^2) = \ln 2 + 2,$$

entonces:

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{\ln 2 + 2 - \ln 2}{2} = 1 \Rightarrow \text{existe } \alpha \in (0, 2) \text{ tal que } f'(\alpha) = 1.$$

* Habría que justificar de alguna manera que $f_3(x) = \ln(2e^x + 2x - x^2)$ está definida en $[0, 2]$; bastaría con comprobar que $2e^x + 2x - x^2 > 0$ cuando $x \geq 0$.

Podría hacerse como sigue:

1) Para $x = 0 \rightarrow 2e^x + 2x - x^2$ vale 2;

2) Derivando $2e^x + 2x - x^2$ se obtiene $2e^x + 2 - 2x = 2(2e^x + 1 - x) > 0$ para valores de x

entre 0 y 2. Luego la expresión $2e^x + 2x - x^2$ es creciente; y como en $x = 0$ vale 2, siempre será positiva.

50. (Propuesto en EvAU 2017, Castilla-La Mancha)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + bx - 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Calcula razonadamente los parámetros a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbf{R}$.

b) Enuncia el teorema de Rolle y comprueba si, para los valores hallados en el apartado anterior, la función $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema en el intervalo $[-2, 6]$.

Solución:

a) El único punto que presenta dudas es $x = 2$.

Continuidad: los límites laterales deben ser iguales.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + a) = 4 + a; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + bx - 9) = -13 + 2b$$

Derivabilidad: las derivadas laterales deben ser iguales.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x) = 4; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-2x + b) = -4 + b$$

De $4 = -4 + b \Rightarrow b = 8$.

Sustituyendo en $4 + a = -13 + 2b \Rightarrow 4 + a = 3 \Rightarrow a = -1$.

La función debe ser: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + 8x - 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) El teorema de Rolle dice:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b) , y además $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

La función anterior es continua y derivable en todo $\mathbf{R}$; en particular en el intervalo $[-2, 6]$.

Como $f(-2) = 3$ y $f(6) = -36 + 48 - 9 = 3$, la función verifica las hipótesis de Rolle, luego existe un punto $c \in (-2, 6)$ tal que $f'(c) = 0$.