Problemas resueltos de los teoremas de Rolle, valor medio y Cauchy

1 ¿Es aplicable el **teorema de Rolle** a la función $f(x) = |x - 1|$ en el intervalo [0, 2]?

2 Estudiar si la función $f(x) = x - x^3$ satisface las condiciones del **teorema de Rolle** en los intervalos [−1, 0] y [0, 1]. en caso afirmativo determinar los valores de c.

3 ¿Satisface la función $f(x) = 1 - x$ las condiciones del **teorema de Rolle** en el intervalo [−1, 1]?

4 Probar que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una única solución.

5 ¿Cuántas raíces tiene la ecuación $x^3 + 6x^2 + 15x - 25 = 0$?

6 Demostrar que la ecuación $2x^3 - 6x + 1 = 0$ una única solución real en el intervalo (0, 1).

7 ¿Se puede aplicar el **teorema de Lagrange** a $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$ en [0, 2]?

8 ¿Se puede aplicar el **teorema de Lagrange** a $f(x) = 1/ x^2$ en [0, 2]?

9 En el segmento de la parábola comprendido entre los puntos A = (1, 1) y B = (3, 0) hallar un punto cuya tangente sea paralela la cuerda.

10 Calcular un punto del intervalo [1, 3] en el que la tangente a la curva $y = x^3 - x^2 + 2$ sea paralela a la recta determinada por los puntos A(1, 2) y B(3, 20). ¿Qué teorema garantiza la existencia de dicho punto?

11 Determinar a y b para que la función

$$f(x)=\begin{cases} ax-3 & Si\ x<4 \\ -x^2+10x-b & Si\ x\geq 4 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del **teorema de Lagrange** en el intervalo [2, 6].

12 Aplicar el **teorema de Cauchy** a las funciones $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = \cos x$ en el intervalo [0, π/2].

13 Analizar si el **teorema de Cauchy** es aplicable en el intervalo [1, 4] a las funciones:

$f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = x^3 - 7x^2 + 120x - 5$.

En caso afirmativo, aplicarlo.

Solución

1

¿Es aplicable el **teorema de Rolle** a la función f(x) = |x − 1| en el intervalo [0, 2]?

$$f(x)=\begin{cases} -x+1 & Si\ x\in[0,1) \\ x-1 & Si\ x\in[1,2] \end{cases}$$

La función es continua en [0, 2].

No es aplicable el **teorema de Rolle** porque la solución no es derivable en el punto x = 1.

$$f'(x)=\begin{cases} -1 & Si\ x\in(0,1) \\ 1 & Si\ x\in[1,2) \end{cases}$$

$$f'(1^-) = -1 \qquad f'(1^+) = 1$$

2

Estudiar si la función f(x) = x − x ^{3} satisface las condiciones del **teorema de Rolle** en los intervalos [−1, 0] y [0, 1]. en caso afirmativo determinar los valores de c.

f(x) es una función continua en los intervalos [−1, 0] y [0, 1] y derivable en los intervalos abiertos (−1, 0) y (0, 1) por ser una función polinómica.

Además se cumple que:

f(−1) = f(0) = f(1) = 0

Por tanto es aplicable el **teorema de Rolle**.

$$f'(c) = 0 \qquad 1-3c^2 = 0 \qquad c = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} \in (-1,0) \qquad \frac{\sqrt{3}}{3} \in (0,1)$$

3

¿Satisface la función f(x) = 1 − x las condiciones del **teorema de Rolle** en el intervalo [−1, 1]?

La función es continua en el intervalo [−1, 1] y derivable en (−1, 1) por ser una función polinómica.

No cumple **teorema de Rolle** porque f(−1) ≠ f(1).

4

Probar que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una única solución.

Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo.

Si la función tuviera dos raíces distintas x_1 y x_2, siendo $x_1 < x_2$, tendríamos que:

$f(x_1) = f(x_2) = 0$

Y como la función es continua y derivable por ser una función polinómica, podemos aplicar el **teorema del Rolle**, que diría que existe un c (x_1, x_2) tal que f' (c) = 0.

$f'(x) = 2 + 6x + 12x^2$ $f'(x) = 2(1 + 3x + 6x^2)$.

Pero $f'(x) \neq 0$, no admite soluciones reales porque el **discrimínante** es negativo:

$\Delta = 9 - 24 < 0$.

Como la derivada no se anula en ningún valor está en contradicción con el **teorema de Rolle**, por lo que la hipótesis de que existen dos raíces es falsa.

5

¿Cuántas raíces tiene la ecuación $x^3 + 6x^2 + 15x - 25 = 0$?

La función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 15x - 25$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

Teorema de Bolzano.

$f(0) = -25$

$f(2) = 37$

Por tanto la ecuación tiene al menos una solución en el intervalo (0, 2).

Teorema de Rolle.

$f'(x) = 3x^2 + 12x + 15$

Dado que la derivada no se anula, ya que su **discriminante** es negativo, la función es estrictamente creciente y posee una única raíz.

6

Demostrar que la ecuación $2x^3 - 6x + 1 = 0$ una única solución real en el intervalo (0, 1).

La función $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

Teorema de Bolzano.

$f(0) = 1$

$f(1) = -3$

Por tanto la ecuación tiene al menos una solución en el intervalo (0, 1).

Teorema de Rolle.

$f'(x) = 6x^2 - 6$ $6x^2 - 6 = 0$ $6(x - 1)(x + 1) = 0$

La derivada se anula en $x = 1$ y $x = -1$, por tanto no puede haber dos raíces en el intervalo (0, 1).

7

¿Se puede aplicar el **teorema de Lagrange** a $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$ en [0, 2]?

f(x) es continua en [0, 2] y derivable en1(2) por tanto se puede aplicar el **teorema del valor medio**:

$$\frac{7-1}{2-0} = f'(c) \qquad f'(c) = 3$$

$$8c - 5 = 3 \qquad c = 1$$

8

¿Se puede aplicar el **teorema de Lagrange** a f(x) = 1/ x^2 en [0, 2]?

La función no es continua en [−1, 2] ya que no definida en x = 0.

9

En el segmento de la parábola comprendido entre los puntos A = (1, 1) y B = (3, 0) hallar un punto cuya tangente sea paralela la cuerda.

Los puntos A = (1, 1) y B = (3, 0) pertenecen a la parábola de ecuación y = x^2 + bx + c.

$$\begin{cases} 1 = 1 + b + c \\ 0 = 9 + 3b + c \end{cases} \qquad b = -\frac{9}{2} \qquad c = \frac{9}{2}$$

$$y = x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{2}$$

Por ser la función polinómica se puede aplicar el teorema del valor medio en el intervalo [1, 3].

$$f'(c) = 2c - \frac{9}{2}$$

$$\frac{9 - \frac{27}{2} + \frac{9}{2} - 1 + \frac{9}{2} - \frac{9}{2}}{2} = 2c - \frac{9}{2}$$

$$-\frac{1}{2} = 2c - \frac{9}{2} \qquad c = 2 \qquad f(c) = 4 - 9 + \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\left(1, -\frac{1}{2}\right)$$

10

Calcular un punto del intervalo [1, 3] en el que la tangente a la curva y = $x^3 - x^2 + 2$ sea paralela a la recta determinada por los puntos A(1, 2) y B(3, 20). ¿Qué teorema garantiza la existencia de dicho punto?

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos.

$$\frac{x - 1}{3 - 1} = \frac{y - 2}{20 - 2} \qquad 9x - 9 = y - 2 \qquad y = 9x - 7$$

Por ser y = $x^3 - x^2 + 2$ continua en [1, 3] y derivable en (1, 3) se puede aplicar el **teorema del valor medio**:

$$\frac{20 - 2}{3 - 1} = f'(c) \qquad f'(c) = 9$$

$$3c^2 - 2c = 9 \qquad 3c^2 - 2c - 9 = 0$$

$$c = \frac{2+\sqrt{112}}{6} \in (1,3) \qquad c = \frac{2-\sqrt{112}}{6} \notin (1,3)$$

11

Determinar a y b para que la función

$$f(x)=\begin{cases} ax-3 & Si\ x<4 \\ -x^2+10x-b & Si\ x\geq 4 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del **teorema de Lagrange** en el intervalo [2, 6].

En primer lugar se debe cumplir que la función sea continua en [2, 6].

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x)$$

$$4a-3 = -16+40-b \qquad a+b = 27$$

En segundo lugar se debe cumplir que la función sea derivable en (2, 6).

$$f'(4^-) = f'(4^+)$$

$$a = -2\cdot 4+10 \qquad a = 2 \qquad b = 19$$

12

Aplicar el **teorema de Cauchy** a las funciones f(x) = sen x y g(x) = cos x en el intervalo [0, π/2].

Las funciones f(x) = sen x y g(x) = cos x son continuas y derivables en toda la recta real.

Y en particular son continuas en el intervalo [0, π/2] y derivables en (0, π/2).

g(π/2) ≠ g(0)

Por lo tanto podemos aplicar el **teorema de Cauchy**:

$$\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen\,0}{cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - cos\,0} = \frac{cos\,c}{-sen\,c}$$

$$\frac{1-0}{0-1} = -tg\,c \qquad tg\,c = 1$$

$$c = \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

g' (c) ≠ 0 −sen(π/4) ≠ 0.

13

Analizar si el **teorema de Cauchy** es aplicable en el intervalo [1, 4] a las funciones:

f(x) = $x^2 - 2x + 3$ y g(x) = $x^3 - 7x^2 + 120x - 5$.

En caso afirmativo, aplicarlo.

Las funciones f(x) y g(x) son continuas en [1, 4] y derivables en (1, 4) por ser polinómicas, además se cumple que g(1) ≠ g(4).

Por lo tanto se verifica el **teorema de Cauchy**:

$$\frac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \frac{11-2}{27-9}=\frac{2c-2}{3c^2-14c+20}$$

$$3c^2-14c+20=4c-4c^2-6c+8=0$$

$$c=2\in(1,4) \qquad c=4\notin(1,4)$$

$$g'(c)\neq 0 \qquad 3\cdot 2^2-14\cdot 2+20\neq 0$$