

TEOREMAS DEL VALOR MEDIO

1. ¿Es aplicable el teorema de Rolle a la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$ en $[0,5]$?

Solución:

El teorema de Rolle dice que:

Para una función f que es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y además cumple que $f(a) = f(b)$, entonces existe como mínimo un $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$

Veamos si nuestra función cumple todas estas condiciones:

- **Estudiamos la continuidad** en $[0,5]$:

Es inmediato que f es continua en todo $\mathbb{R}$, ya que se trata de un polinomio. Así que f es continua en $[0,5]$

- **Estudiamos la derivabilidad** en $(0,5)$:

Es inmediato que f es derivable en todo $\mathbb{R}$, ya que se trata de un polinomio. Así que f es derivable en $(0,5)$

- **Estudiamos si se cumple** $f(a) = f(b)$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6 \\ f(5) = 5^2 - 5 \cdot 5 + 6 = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = f(5)$$

Podemos entonces afirmar que se cumple el Teorema de Rolle.

Hallemos el punto c , el cuál está dado por la condición $f'(c) = 0$. Tenemos que encontrar, entonces, los valores x que anulan la primera derivada de la función. La derivada de $f(x) = x^2 - 5x + 6$ es $f'(x) = 2x - 5$.

$$\text{Así que } f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{5}{2}}$$

2. ¿Es aplicable el teorema de Rolle a la función $f(x) = |x - 2|$ en $[0, 4]$?

Solución:

El teorema de Rolle dice que:

Para una función f que es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y además cumple que $f(a) = f(b)$, entonces existe como mínimo un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

Lo primero que vamos a hacer es escribir la función dada como sigue, ya que se trata de una función de valor absoluto.

$$f(x) = \begin{cases} -(x-2) & \text{si } x < 2 \\ x-2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Veamos si nuestra función cumple todas estas condiciones:

- **Continuidad** en $[0, 4]$:

La continuidad de f sólo puede fallar en el punto 2. La función será continua en 2 si los límites laterales son iguales y su valor coincide con el valor de $f(2)$:

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} [-(x-2)] = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0$
- $f(2) = 2 - 2 = 0$

Vemos que $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 0$, luego la función es continua en 2.

- **Derivabilidad** en $(0, 4)$:

La derivabilidad de f sólo puede fallar en el punto 2. Para probar que es derivable en 2 hay que ver si se cumple que $f'(2^-) = f'(2^+)$:

$$\begin{aligned} \text{▪ } f'(2^-) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2) - (2-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\cancel{-(x-2)}}{\cancel{x-2}} = -1 \end{aligned}$$

$$\bullet f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2) - (2-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1$$

$$f'(2^-) \neq f'(2^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } 2.$$

Conclusión:

No se cumplen todos los requisitos del Teorema de Rolle. No existirá ningún $c \in (0,4)$ que verifique $f'(c) = 0$.

3. Halla a, b y c para que $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq 3 \\ bx + c & \text{si } x > 3 \end{cases}$ cumpla el Teorema de Rolle en $[-1,7]$

Solución:

El teorema de Rolle dice que:

Para una función f que es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y además cumple que $f(a) = f(b)$, entonces existe como mínimo un $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$

Veamos si nuestra función cumple todas estas condiciones:

- **Continuidad** en $[-1,7]$:

La continuidad de f sólo puede fallar en el punto 3. La función será continua en 3 si los límites laterales son iguales y su valor coincide con el valor de $f(3)$:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 + ax) = 9 + 3a \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (bx + c) = 3b + c \\ \bullet f(3) &= 9 + 3a \end{aligned}$$

Se tiene que cumplir entonces que: $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$, es decir:
 $9 + 3a = 3b + c$

- **Derivabilidad** en $(-1,7)$:

La derivabilidad de f sólo puede fallar en el punto 3. Para probar que es derivable en 3 hay que ver si se cumple que $f'(3^-) = f'(3^+)$:

$$\begin{aligned} \bullet \quad f'(3^-) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + ax - 9 - 3a}{x - 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9 + a(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} + \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{a(x - 3)}{x - 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}} + \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{a\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = 9 + a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad f'(3^+) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{bx + c - (3b + c)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{bx - 3b}{x - 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{b\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = b \end{aligned}$$

Se tiene que cumplir entonces que $a = b$

A modo de concreción, vamos a reunir todas las condiciones que se han de dar para la continuidad y derivabilidad, que no son más que las definidas por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} a = b \\ 9 + 3a = 3b + c \end{array} \right\} \Rightarrow 9 + 3a = 3a + c \Rightarrow c = 9$$

Nos queda analizar una última condición:

- **La función debe tener el mismo valor en los extremos del intervalo:**

$$f(-1) = f(7).$$

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = (-1)^2 + a(-1) = 1 - a \\ f(7) = 7b + 9 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - a = 7b + 9$$

$$\text{Pero } a = b, \text{ por lo que } 1 - a = 7b + 9 \Rightarrow 1 - a = 7a + 9 \Rightarrow a = -1$$

Conclusión final:

$a = b = -1$; $c = 9$, por lo que la siguiente función cumplirá el Teorema de Rolle:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 3 \\ -x + 9 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

4. Verifica que se cumple el Teorema del valor medio para $f(x) = 2x^2 - 7x + 10$ en el intervalo $[2, 5]$

Solución:

Recordemos el Teorema del valor medio:

Para una función f que es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) , entonces

existe como mínimo un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

La función, por tratarse de un polinomio, es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, por lo que debe de existir, como mínimo, un c tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Vamos a buscar el valor de c :

Sustituimos los datos del enunciado en la expresión $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 7x + 10 \Rightarrow f'(x) = 4x - 7 \\ f(b) &= f(5) = 2 \cdot 5^2 - 7 \cdot 5 + 10 = 25 \\ f(a) &= f(2) = 2 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 10 = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x - 7 = \frac{21}{3} \Rightarrow \boxed{c = \frac{7}{2}}$$

5. Verifica que se cumple el Teorema del valor medio para $f(x) = x^3 + x - 1$ en el intervalo $[0, 2]$ y encuentra todos los números c que lo satisface.

Solución:

Recordemos el Teorema del valor medio:

Para una función f que es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) , entonces

existe como mínimo un $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

La función dada es un polinomio, por lo que será continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Ello quiere decir que, como mínimo, habrá un c que cumpla

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Vamos a hallar esos valores c :

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 + 1 \\ f(0) = -1 \\ f(2) = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 + 1 = \frac{9 - (-1)}{2 - 0} \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

De estas dos soluciones, sólo $\frac{2}{\sqrt{3}}$ está en $[0,2]$, por lo que $\boxed{c = \frac{2}{\sqrt{3}}}$

6. Sea la función $f(x) = 5 - \frac{4}{x}$. Halla todos los valores pertenecientes al intervalo $(1,4)$, que denotaremos por c , que cumplan lo siguiente:

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$$

Solución:

Recordemos el Teorema del valor medio:

Para una función f que es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) , entonces

existe como mínimo un $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Para hallar c tenemos que encontrar el valor de $f'(c)$ y eso se hace sustituyendo los valores de $f(4)$ y $f(1)$ en la expresión $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$:

$$\left. \begin{aligned} f(4) &= 5 - \frac{4}{4} = 4 \\ f(1) &= 5 - \frac{4}{1} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{4 - 1}{4 - 1} = 1 \Rightarrow f'(c) = 1$$

Los valores c que hacen que se cumpla $f'(c) = 1$ son:

$$f'(x) = 1 \Rightarrow 0 - \left(-\frac{4}{x^2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{4}{x^2} = 1 \Rightarrow x = \pm 2$$

Pero en $(1, 4)$ sólo está incluido el 2. Así que nuestra solución es: $x = 2$

7. Demuestra que $f(x)$ cumple todas los requisitos del teorema del valor medio en $[2, 6]$. ¿Para qué puntos se cumple?

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - 19 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Solución:

Recordemos el Teorema del valor medio:

Para una función f que es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) , entonces

existe como mínimo un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Estudiamos si la función cumple estas condiciones:

- **Continuidad** en $[2, 6]$:

La continuidad de f sólo puede fallar en el punto 4. La función será continua en 4 si los límites laterales son iguales y su valor coincide con el valor de $f(4)$:

- $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (2x - 3) = 5$
- $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (-x^2 + 10x - 19) = 5$
- $f(4) = 5$

Se cumple $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4)$, por lo que $f(x)$ es continua en $x = 4$

- **Derivabilidad** en $(2,6)$:

La derivabilidad de f sólo puede fallar en el punto 4. Para probar que es derivable en 4 hay que ver si se cumple que $f'(4^-) = f'(4^+)$:

$$\bullet f'(4^-) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x - 3 - (2 \cdot 4 - 3)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2(x - 4)}{x - 4} = 2$$

$$\begin{aligned} \bullet f'(4^+) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{-x^2 + 10x - 19 - (-4^2 + 10 \cdot 4 - 19)}{x - 4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{-(x - 6)(\cancel{x - 4})}{\cancel{x - 4}} = 2 \end{aligned}$$

Se cumple $f'(4^-) = f'(4^+)$, luego la función es derivable en $x = 4$

Lo anterior asegura que existe como mínimo un $c \in (2,6)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2}. \text{ Veamos cual es ese valor.}$$

▪ Si el posible punto es menor que 4:

$$f'(x) = 2, \text{ lo cual se queda fuera del intervalo } (2,6)$$

▪ Si el posible punto es mayor que 4:

$$f'(x) = -2x + 10 = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{5 - 17}{4} = 2 \Rightarrow \boxed{x = 4}$$