

1.5. Ecuaciones Logarítmicas y Exponenciales

Problema 126 Resolver las ecuaciones:

1. $\log(3x + 1) - \log x = 1 + \log x$

2. $2^{2x-1} + 2^{x+2} - 1 = 0$

Solución:

1.

$$\log(3x + 1) - \log x = 1 + \log x \implies \log(3x + 1) = \log 10 + 2 \log x$$

$$\log(3x + 1) = \log(10x^2) \implies 10x^2 - 3x - 1 = 0 \implies x = \frac{1}{2}, \quad x = -\frac{1}{5}$$

De las dos soluciones hay una que no es posible ya que no existen logaritmos de números negativos, es decir, de las dos soluciones la única posible es $x = \frac{1}{2}$

2.

$$2^{2x-1} + 2^{x+2} - 1 = 0 \implies \frac{2^{2x}}{2} + 2^x 2^2 - 1 = 0 \implies 2^{2x} + 8 \cdot 2^x - 2 = 0$$

Haciendo el cambio de variables $u = 2^x$ la ecuación quedará de la siguiente forma:

$$u^2 + 8u - 2 = 0 \implies u = 0,2426406871, \quad u = -8,242640687$$

Deshaciendo el cambio de variable tenemos que

$$u = 0,2426406871 = 2^x \implies \log 0,2426406871 = \log 2^x \implies$$

$$\begin{aligned} x \log 2 &= \log 0,2426406871 \implies \\ x &= \frac{\log 0,2426406871}{\log 2} = -2,242640687 \end{aligned}$$

En el otro caso, $u = -8,242640687 = 2^x$ no es posible obtener solución.

Problema 127 Resolver las ecuaciones:

1. $\log(3x+1) - \log x = 1 + \log(1-x)$
2. $2^{2x-1} + 2^{x+3} - 1 = 0$

Solución:

1.

$$\log(3x+1) - \log x = 1 + \log(1-x) \implies \log(3x+1) = \log 10 + \log(1-x) + \log x$$

$$\log(3x+1) = \log(10x(1-x)) \implies 10x^2 - 7x + 1 = 0 \implies x = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{1}{5}$$

2.

$$2^{2x-1} + 2^{x+3} - 1 = 0 \implies \frac{2^{2x}}{2} + 2^x \cdot 2^3 - 1 = 0 \implies 2^{2x} + 16 \cdot 2^x - 2 = 0$$

Haciendo el cambio de variables $u = 2^x$ la ecuación quedará de la siguiente forma:

$$u^2 + 16u - 2 = 0 \implies u = -16,12403840, \quad u = 0,1240384046$$

Deshaciendo el cambio de variable tenemos que

$$u = 0,1240384046 = 2^x \implies \log 0,1240384046 = \log 2^x \implies$$

$$\begin{aligned} x \log 2 &= \log 0,1240384046 \implies \\ x &= \frac{\log 0,1240384046}{\log 2} = -3,011141219 \end{aligned}$$

En el otro caso, $u = -16,12403840 = 2^x$ no es posible obtener solución.

Problema 128 Resolver las ecuaciones:

1. $\log(3x^2 - 2) = 1 + \log(x-1)$
2. $2^{2x-1} + 2^{x+1} - 2 = 0$

Solución:

1.

$$\log(3x^2 - 2) = 1 + \log(x - 1) \implies \log(3x^2 - 2) = \log 10 + \log(x - 1)$$

$$\log(3x^2 - 2) = \log(10(x - 1)) \implies 3x^2 - 10x + 8 = 0 \implies x = 2, \quad x = \frac{4}{3}$$

2.

$$2^{2x-1} + 2^{x+1} - 2 = 0 \implies \frac{2^{2x}}{2} + 2 \cdot 2^x - 2 = 0 \implies 2^{2x} + 4 \cdot 2^x - 4 = 0$$

Haciendo el cambio de variables $u = 2^x$ la ecuación quedará de la siguiente forma:

$$u^2 + 4u - 4 = 0 \implies u = 0,8284271247, \quad u = -4,828427124$$

Deshaciendo el cambio de variable tenemos que

$$u = 0,8284271247 = 2^x \implies \log 0,8284271247 = \log 2^x \implies$$

$$x \log 2 = \log 0,8284271247 \implies$$

$$x = \frac{\log 0,8284271247}{\log 2} = -0,2715533031$$

En el otro caso, $u = -4,828427124 = 2^x$ no es posible obtener solución.

Problema 129 Calcular:

1. $\log(x^2 + 2) - \log x = 1$

2. $4^{x-1} + 2^x - 1 = 0$

Solución:

1. $\log(x^2 + 2) - \log x = 1 \implies x = 0,2041684766, \quad x = 9,795831523$

2. $4^{x-1} + 2^x - 1 = 0 \implies x = -0,2715533031$

Problema 130 Resolver las ecuaciones:

1. $\log(x - 1) - \log(x + 1) = 1 - \log x$

2. $\log x + 1 = \log x^2$

3. $3^{2x-1} + 3^{x+1} - 2 = 0$

4. $3^{x+1} + 3^{x-1} - 1 = 0$

Solución:

1.

$$\log(x-1) - \log(x+1) = 1 - \log x \implies \log \frac{x-1}{x+1} = \log \frac{10}{x}$$

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{10}{x} \implies x^2 - 11x - 10 = 0 \implies$$

$$x = 11,84428877, \quad x = -0,8442887702$$

De las dos soluciones hay una que no es posible ya que no existen logaritmos de números negativos, es decir, de las dos soluciones la única posible es $x = 11,84428877$

2.

$$\log x + 1 = \log x^2 \implies \log 10x = \log x^2 \implies 10x = x^2 \implies x = 0, \quad x = 10$$

De las dos soluciones hay una que no es posible ya que no existen logaritmos del cero, es decir, de las dos soluciones la única posible es $x = 10$

3.

$$3^{2x-1} + 3^{x+1} - 2 = 0 \implies \frac{3^{2x}}{3} + 3 \cdot 3^x - 2 = 0 \implies 3^{2x} + 9 \cdot 3^x - 6 = 0$$

Haciendo el cambio de variables $u = 2^x$ la ecuación quedará de la siguiente forma:

$$u^2 + 9u - 6 = 0 \implies u = 0,6234753829, \quad u = -9,623475382$$

Deshaciendo el cambio de variable tenemos que

$$u = 0,6234753829 = 3^x \implies \log 0,6234753829 = \log 3^x \implies$$

$$x \log 3 = \log 0,6234753829 \implies$$

$$x = \frac{\log 0,6234753829}{\log 3} = -0,4300388787$$

En el otro caso, $u = -9,623475382 = 3^x$ no es posible obtener solución.

4.

$$3^{x+1} + 3^{x-1} - 1 = 0 \implies 3 \cdot 3^x + \frac{3^x}{3} - 1 = 0 \implies 10 \cdot 3^x - 3 = 0 \implies$$

$$3^x = 0,3 \implies \log 3^x = \log 0,3 \implies x \log 3 = \log 0,3 \implies$$

$$x = \frac{\log 0,3}{\log 3} = -1,095903274$$

Problema 131 Resolver las ecuaciones:

$$1. \log(x-1) - \log(x+1) = 1 - \log x$$

$$2. 3^{2x-1} + 3^{x+1} - 2 = 0$$

Solución:

1.

$$\log(x-1) - \log(x+1) = 1 - \log x \implies \log \frac{x-1}{x+1} = \log \frac{10}{x}$$

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{10}{x} \implies x^2 - 11x - 10 = 0 \implies$$

$$x = 11,84428877, \quad x = -0,8442887702$$

De las dos soluciones hay una que no es posible ya que no existen logaritmos de números negativos, es decir, de las dos soluciones la única posible es $x = 11,84428877$

2.

$$3^{2x-1} + 3^{x+1} - 2 = 0 \implies \frac{3^{2x}}{3} + 3 \cdot 3^x - 2 = 0 \implies 3^{2x} + 9 \cdot 3^x - 6 = 0$$

Haciendo el cambio de variables $u = 3^x$ la ecuación quedará de la siguiente forma:

$$u^2 + 9u - 6 = 0 \implies u = 0,6234753829, \quad u = -9,623475382$$

Deshaciendo el cambio de variable tenemos que

$$u = 0,6234753829 = 3^x \implies \log 0,6234753829 = \log 3^x \implies$$

$$x \log 3 = \log 0,6234753829 \implies$$

$$x = \frac{\log 0,6234753829}{\log 3} = -0,4300388787$$

En el otro caso, $u = -9,623475382 = 3^x$ no es posible obtener solución.

Problema 132 Resolver:

$$1. \log(1+x) - \log(1-x) = 2$$

$$2. 3^{2x} - 2 \cdot 3^x + 1 = 0$$

Solución:

$$1. \log(1+x) - \log(1-x) = 2 \implies \log \frac{1+x}{1-x} = \log 100 \implies$$

$$1+x = 100(1-x) \implies x = \frac{99}{101}$$

2. $3^{2x} - 2 \cdot 3^x + 1 = 0$ haciendo $t = 3^x$ tenemos que:

$t^2 - 2t + 1 = 0 \implies t = 1$, deshaciendo el cambio de variable tenemos:

$$t = 3^x = 1 \implies x = 0$$

Problema 133 Resolver las siguientes ecuaciones

1. $\log(x^2 - 2) + 1 = \log(x + 1) + \log(x - 1)$

2. $3^{2x-1} + 3^{x+1} - 1 = 0$

Solución:

1.

$$\log(x^2 - 2) + 1 = \log(x + 1) + \log(x - 1)$$

$$\log(x^2 - 2) + \log 10 = \log(x + 1) + \log(x - 1)$$

$$\log 10(x^2 - 2) = \log(x^2 - 1) \implies 10x^2 - 20 = x^2 - 1 \implies x = \pm \frac{\sqrt{19}}{3}$$

La solución negativa no es válida, ya que no existen logaritmos de números negativos y, por tanto, $x = \frac{\sqrt{19}}{3}$.

2.

$$3^{2x-1} + 3^{x+1} - 1 = 0 \implies \frac{(3^x)^2}{3} + 3 \cdot 3^x - 1 = 0$$

Si hacemos $t = 3^x$ nos queda

$$\frac{t^2}{3} + 3t - 1 = 0 \implies t^2 + 9t - 3 = 0 \implies t = 0,321825; \quad t = -9,321825$$

Deshaciendo el cambio de variable tendremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3^x = 0,321825 \implies \log 3^x = \log 0,321825 \implies x \log 3 = \log 0,321825 \implies \\ \implies x = \frac{\log 0,321825}{\log 3} = -1,03198 \\ 3^x = -9,321825 \text{ no tiene solución} \end{array} \right.$$