3 Trigonometría

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Expresa en radianes las siguientes medidas angulares.

a) 30º

b) 60º

c) 200º

d) 330º

a) $30^\circ = \dfrac{30^\circ\,\pi}{180^\circ} = \dfrac{\pi}{6}$ rad

b) $60^\circ = \dfrac{60^\circ\,\pi}{180^\circ} = \dfrac{\pi}{3}$ rad

c) $200^\circ = \dfrac{200^\circ\,\pi}{180^\circ} = \dfrac{10\pi}{9}$ rad

d) $330^\circ = \dfrac{330^\circ\,\pi}{180^\circ} = \dfrac{11\pi}{6}$ rad

4. Halla la medida en grados de los siguientes ángulos.

a) $\dfrac{7\pi}{3}$ rad

b) $\dfrac{3\pi}{2}$ rad

c) 4 rad

d) 4π rad

a) $\dfrac{7\pi}{3}$ rad $= \dfrac{7\pi\cdot 180^\circ}{3\pi} = 420^\circ$

b) $\dfrac{3\pi}{2}$ rad $= \dfrac{3\pi\cdot 180^\circ}{2\pi} = 270^\circ$

c) 4 rad $= \dfrac{4\cdot 180^\circ}{\pi} = 229^\circ\ 11'$

d) 4π rad $= \dfrac{4\pi\cdot 180^\circ}{\pi} = 720^\circ$

5. Determina las razones trigonométricas de los ángulos de un triángulo cuyos lados miden 6, 8 y 10 cm, respectivamente.

Se trata de un triángulo rectángulo, pues verifica el teorema de Pitágoras: $10^2 = 6^2 + 8^2$

$\text{sen}\ \hat{A} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$ $\quad \cos \hat{A} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$ $\quad \text{tg}\ \hat{A} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

$\text{sen}\ \hat{B} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$ $\quad \cos \hat{B} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$ $\quad \text{tg}\ \hat{B} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

6. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de estos triángulos.

a) $\hat{A} = 90º$, $b = 10$ cm, $c = 12$ cm **b)** $\hat{B} = 90º$, $b = 15$ cm, $c = 12$ cm **c)** $\hat{C} = 90º$, $b = 12$ cm, $c = 20$ cm

a) $a = \sqrt{10^2 + 12^2} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$ cm

$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{10}{2\sqrt{61}} = \frac{5\sqrt{61}}{61}$ $\cos\hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{12}{2\sqrt{61}} = \frac{6\sqrt{61}}{61}$ $\text{tg}\,\hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{12}{2\sqrt{61}} = \frac{6\sqrt{61}}{61}$ $\cos\hat{C} = \frac{b}{a} = \frac{10}{2\sqrt{61}} = \frac{5\sqrt{61}}{61}$ $\text{tg}\,\hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$

b) $a = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9$ cm

$\text{sen}\,\hat{A} = \frac{a}{b} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ $\cos\hat{A} = \frac{c}{b} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ $\text{tg}\,\hat{A} = \frac{a}{c} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ $\cos\hat{C} = \frac{a}{b} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ $\text{tg}\,\hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

c) $a = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{256} = 16$ cm

$\text{sen}\,\hat{A} = \frac{a}{c} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$ $\cos\hat{A} = \frac{b}{c} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ $\text{tg}\,\hat{A} = \frac{a}{b} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$

$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ $\cos\hat{B} = \frac{a}{c} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$ $\text{tg}\,\hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

7. Calcula las razones inversas del ángulo menor en el triángulo rectángulo cuyos catetos midan 5 y 10 cm.

Hipotenusa: $a = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$ cm. El ángulo de menor amplitud es el opuesto al cateto menor, por tanto:

$\text{cosec}\,\alpha = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$ $\sec\alpha = \frac{5\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\text{cotg}\,\alpha = \frac{10}{5} = 2$

8. Ejercicio resuelto.

9. Halla los ángulos reducidos y las razones trigonométricas de estos ángulos.

a) 3990º **b)** 9π **c)** 25200º **d)** $\frac{121\pi}{4}$

a) Se calcula el ángulo reducido: $3990º : 360º = 11{,}08\widehat{3}$ y $0{,}08\widehat{3} \cdot 360º = 30º$

$\text{sen}\,3990º = \text{sen}\,30º = \frac{1}{2}$ $\cos 3990º = \cos 30º = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\text{tg}\,3990º = \text{tg}\,30º = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) Se calcula el ángulo reducido: $9\pi : 2\pi = 4{,}5$ rad y $0{,}5 \cdot 2\pi = \pi$ rad

$\text{sen}\,9\pi = \text{sen}\,\pi = 0$ $\cos 9\pi = \cos\pi = -1$ $\text{tg}\,9\pi = \text{tg}\,\pi = 0$

c) Se calcula el ángulo reducido: 25 200º : 360º = 70 y 0 · 360º = 0º

$\text{sen}\,25\,200º = \text{sen}\,0º = 0$ $\cos 25\,200º = \cos 0º = 1$ $\text{tg}\,25\,200º = \text{tg}\,0º = 0$

d) Se calcula el ángulo reducido: $\frac{121\pi}{4} : 2\pi = 15{,}125$ rad y $0{,}125 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}$ rad

$\text{sen}\frac{121\pi}{4} = \text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos\frac{121\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\text{tg}\frac{121\pi}{4} = \text{tg}\frac{\pi}{4} = 1$

10. Halla el signo de todas las razones trigonométricas de:

a) 120º **c)** 256º **e)** 315º

b) –70º **d)** 800º **f)** –460º

α	120º	–70º	256º	800º	315º	–460º
Cuadrante	II	IV	III	I	IV	III
$\text{sen}\,\alpha$ y $\text{cosec}\,\alpha$	+	–	–	+	–	–
$\cos\alpha$ y $\sec\alpha$	–	+	–	+	+	–
$\text{tg}\,\alpha$ y $\text{cotg}\,\alpha$	–	–	+	+	–	+

11. Para los siguientes ángulos, indica el signo de todas sus razones trigonométricas.

a) $\frac{3\pi}{4}$ **c)** $\frac{4\pi}{3}$ **e)** $-\frac{9\pi}{4}$

b) $\frac{11\pi}{3}$ **d)** $-\frac{7\pi}{6}$ **f)** $-\frac{5\pi}{3}$

α	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{9\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{3}$
Cuadrante	II	IV	III	II	IV	I
$\text{sen}\,\alpha$ y $\text{cosec}\,\alpha$	+	–	–	+	–	+
$\cos\alpha$ y $\sec\alpha$	–	+	–	–	+	+
$\text{tg}\,\alpha$ y $\text{cotg}\,\alpha$	–	–	+	–	–	+

12 y 13. Ejercicios resueltos.

14. Calcula el valor de las siguientes razones trigonométricas reduciéndolas al primer cuadrante.

a) sen 150º **d)** tg 330º **g)** sen 240º

b) cos 225º **e)** cosec 135º **h)** cotg 300º

c) sen 840º **f)** tg 1800º **i)** sec 2295º

a) $\text{sen}\,150º = \text{sen}\,30º = \frac{1}{2}$

d) $\text{tg}\,330º = -\text{tg}\,30º = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

g) $\text{sen}\,240º = -\,\text{sen}\,60º = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos 225º = -\cos 45º = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\text{cosec}\,135º = \frac{1}{\text{sen}\,45º} = \sqrt{2}$

h) $\text{cotg}\,300º = -\frac{1}{\text{tg}\,60º} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\text{sen}\,840º = \text{sen}\,60º = \frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\text{tg}\,1800º = \text{tg}\,0º = 0$

i) $\sec 2295º = -\frac{1}{\cos 45º} = -\sqrt{2}$

15. Calcula, en función de *h*, sen 303º sabiendo que cos 33º = *h*.

$\text{sen}\,303º = -\text{sen}\,57º = -\text{sen}\,(90º - 33º) = -\cos 33º = -h$

16. Calcula el valor exacto de:

a) sen $\frac{3\pi}{4}$ **b)** sen $\frac{11\pi}{6}$ **c)** sen $\frac{4\pi}{3}$ **d)** sen $\frac{5\pi}{6}$

a) $\text{sen}\,\frac{3\pi}{4} = \text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\text{sen}\,\frac{11\pi}{6} = -\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

c) $\text{sen}\,\frac{4\pi}{3} = -\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\text{sen}\,\frac{5\pi}{6} = \text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

17. Ejercicio interactivo.

18 y 19. Ejercicios resueltos.

20. Calcula las restantes razones de α sabiendo que:

a) La cotangente de un ángulo $\alpha < 90º$ vale $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) $\sec\alpha = –5$ y $90º < \alpha < 180º$

c) $\text{cosec}\,\alpha = –2$ y $\alpha \in \text{III}$

a) Al ser un ángulo del primer cuadrante, todas las razones son positivas. Tenemos:

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha \Rightarrow \sec\alpha = \sqrt{1+\text{tg}^2\alpha} = \sqrt{1+3} = 2 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \cos\alpha\,\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{cosec}\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b) Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno y la cosecante son positivos y el resto de razones son negativas. Tenemos:

$$\sec\alpha = –5 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{5}$$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \Rightarrow \text{cosec}\,\alpha = \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = –2\sqrt{6} \Rightarrow \text{cotg}\,\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{12}$$

c) Al ser un ángulo del tercer cuadrante, el seno, coseno, cosecante y secante son negativas, y el resto de razones, positivas. Tenemos:

$$\text{cosec}\,\alpha = –2 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{1}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sec\alpha = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{cotg}\,\alpha = \sqrt{3}$$

21. Calcula la razón pedida en cada caso.

a) $\operatorname{sen}\alpha$, si $\operatorname{tg}\alpha = -3$ y $\alpha \in \text{II}$ **b)** $\operatorname{tg}\alpha$, si $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ y $\alpha \in \text{IV}$ **c)** $\cos\alpha$, si $\operatorname{cotg}\alpha = 5$ y $\alpha \in \text{III}$

a) Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno es positivo. Tenemos:

$$1+\operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{9}}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

b) Al ser un ángulo del cuarto cuadrante, la tangente es negativa. Tenemos:

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1} = -\sqrt{\frac{25}{16}-1} = -\sqrt{\frac{9}{16}} = -\frac{3}{4}$$

c) Al ser un ángulo del tercer cuadrante, el coseno es negativo. Tenemos:

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = -\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{25}}} = -\sqrt{\frac{25}{26}} = -\frac{5\sqrt{26}}{26}$$

22 a 24. Ejercicios resueltos.

25. Transforma 15º y $\frac{5\pi}{12}$ rad en una suma o diferencia de ángulos y calcula sus razones trigonométricas.

$15º = 60° - 45°$:

$$\operatorname{sen}15º = \operatorname{sen}(60º-45º) = \operatorname{sen}60º\cos45º - \cos60º\operatorname{sen}45º = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos15º = \cos(60º-45º) = \cos60º\cos45º + \operatorname{sen}60º\operatorname{sen}45º = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg}15º = \operatorname{tg}(60º-45º) = \frac{\operatorname{tg}60º - \operatorname{tg}45º}{1+\operatorname{tg}60º\operatorname{tg}45º} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}-4}{2} = 2-\sqrt{3}$$

$\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$:

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2+\sqrt{3}$$

26. Calcula tg 75º a partir del seno y del coseno.

$75º = 45º + 30º$:

$$\operatorname{sen}75º = \operatorname{sen}(45º+30º) = \operatorname{sen}45º\cos30º + \cos45º\operatorname{sen}30º = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos75º = \cos(45º+30º) = \cos45º\cos30º - \operatorname{sen}45º\operatorname{sen}30º = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg}75º = \frac{\operatorname{sen}75º}{\cos75º} = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = 2+\sqrt{3}$$

27. Demuestra que $\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos\alpha$.

$$\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}\alpha\cos\frac{3\pi}{2}+\cos\alpha\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}=\operatorname{sen}\alpha\cdot 0+\cos\alpha\cdot(-1)=-\cos\alpha$$

28 y 29. Ejercicios resueltos.

30. Determina el valor del seno, el coseno y la tangente de los ángulos 120º y $\frac{4\pi}{3}$ rad.

$$\operatorname{sen}120^{\circ}=\operatorname{sen}(2\cdot 60^{\circ})=2\operatorname{sen}60^{\circ}\cos 60^{\circ}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^{\circ}=\cos(2\cdot 60^{\circ})=\cos^2 60^{\circ}-\operatorname{sen}^2 60^{\circ}=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg}120^{\circ}=\operatorname{tg}(2\cdot 60^{\circ})=\frac{2\operatorname{tg}60^{\circ}}{1-\operatorname{tg}^2 60^{\circ}}=\frac{2\sqrt{3}}{1-\left(\sqrt{3}\right)^2}=-\sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}=\operatorname{sen}\left(2\cdot\frac{2\pi}{3}\right)=2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4\pi}{3}=\cos\left(2\cdot\frac{2\pi}{3}\right)=\cos^2\frac{2\pi}{3}-\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(2\cdot\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{3}}=\frac{-2\sqrt{3}}{1-\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{3}$$

31. Desarrolla las expresiones de cos 3α y de tg 3α en función de las razones trigonométricas del ángulo α.

$$\cos 3\alpha=\cos(\alpha+2\alpha)=\cos\alpha\cos 2\alpha-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}2\alpha=\cos\alpha\left(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha\right)-\operatorname{sen}\alpha\cdot 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=$$

$$=\cos^3\alpha-\cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha-2\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}(\alpha+2\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha+2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}{\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha-2\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha\left(3-\operatorname{tg}^2\alpha\right)}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$$

32. Si α es un ángulo del segundo cuadrante y sen α = $\frac{3}{5}$, calcula las razones de $\frac{\alpha}{2}$.

El ángulo $\frac{\alpha}{2}$ es del primer cuadrante, por tanto sus razones trigonométricas son positivas. Tenemos:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{3}{5}\Rightarrow\cos\alpha=-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}}=\sqrt{9}=3$$

33. Calcula sen 32º suponiendo que sen 8º = 0,14.

$$\operatorname{sen} 8^\circ = 0{,}14 \Rightarrow \cos 8^\circ = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 8^\circ} = \sqrt{1-0{,}14^2} = 0{,}99$$

$$\operatorname{sen} 16^\circ = \operatorname{sen}(2\cdot 8^\circ) = 2\operatorname{sen} 8^\circ \cos 8^\circ = 2\cdot 0{,}14\cdot 0{,}99 = 0{,}2772 \Rightarrow \cos 16^\circ = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 16^\circ} = 0{,}9608$$

$$\operatorname{sen} 32^\circ = \operatorname{sen}(2\cdot 16^\circ) = 2\operatorname{sen} 16^\circ \cos 16^\circ = 2\cdot 0{,}2772\cdot 0{,}9608 \simeq 0{,}5327$$

34 y 35. Ejercicios resueltos.

36. Transforma en productos.

a) sen 55º + sen 15º **b)** sen 75º – sen 35º **c)** cos 125º + cos 85º **d)** cos 220º – cos 20º

a) $\operatorname{sen} 55^\circ + \operatorname{sen} 15^\circ = 2\operatorname{sen}\dfrac{55^\circ+15^\circ}{2}\cos\dfrac{55^\circ-15^\circ}{2} = 2\operatorname{sen} 35^\circ \cos 20^\circ$

b) $\operatorname{sen} 75^\circ - \operatorname{sen} 35^\circ = 2\cos\dfrac{75^\circ+35^\circ}{2}\operatorname{sen}\dfrac{75^\circ-35^\circ}{2} = 2\cos 55^\circ \operatorname{sen} 20^\circ$

c) $\cos 125^\circ + \cos 85^\circ = 2\cos\dfrac{125^\circ+85^\circ}{2}\cos\dfrac{125^\circ-85^\circ}{2} = 2\cos 105^\circ \cos 20^\circ$

d) $\cos 220^\circ - \cos 20^\circ = -2\operatorname{sen}\dfrac{220^\circ+20^\circ}{2}\operatorname{sen}\dfrac{220^\circ-20^\circ}{2} = -2\operatorname{sen} 120^\circ \operatorname{sen} 100^\circ$

37. Expresa en forma de sumas o diferencias.

a) sen 80º sen40º **b)** cos 25º cos 10º

a) $80^\circ = \dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2};\ 40^\circ = \dfrac{\hat{A}-\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ;\ \hat{B} = 40^\circ$

$\operatorname{sen} 80^\circ \operatorname{sen} 40^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot 2\operatorname{sen}\dfrac{120^\circ+40^\circ}{2}\operatorname{sen}\dfrac{120^\circ-40^\circ}{2} = -\dfrac{1}{2}(\cos 120^\circ - \cos 40^\circ)$

b) $25^\circ = \dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2};\ 10^\circ = \dfrac{\hat{A}-\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 35^\circ;\ \hat{B} = 15^\circ$

$\cos 25^\circ \cos 10^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cos\dfrac{35^\circ+15^\circ}{2}\cos\dfrac{35^\circ-15^\circ}{2} = \dfrac{1}{2}(\cos 35^\circ + \cos 15^\circ)$

38. Comprueba que cos 75º + cos 45º = cos 15º.

$$\cos 75^\circ + \cos 45^\circ = 2\cos\frac{75^\circ+45^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ-45^\circ}{2} = 2\cos 60^\circ \cos 15^\circ = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 15^\circ = \cos 15^\circ$$

39. Simplifica la siguiente expresión: $\boldsymbol{\dfrac{\cos 2x + \cos x}{\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x}}$

$$\frac{\cos 2x + \cos x}{\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x} = \frac{2\cos\dfrac{2x+x}{2}\cos\dfrac{2x-x}{2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{2x+x}{2}\cos\dfrac{2x-x}{2}} = \frac{\cos\dfrac{3x}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{3x}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{3x}{2}$$

40. Calcula el valor de: $\boldsymbol{\cos\dfrac{\pi}{6} + \cos\dfrac{\pi}{12} - 2\cos\dfrac{\pi}{24}\cos\dfrac{\pi}{8}}$

$$\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{12} - 2\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{8} = 2\cos\frac{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{12}}{2} - 2\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{8} = 2\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{24} - 2\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{8} = 0$$

41. Ejercicio interactivo.

42 a 46. Ejercicios resueltos.

47. Resuelve las siguientes ecuaciones y da los resultados en grados y en radianes.

a) $\operatorname{sen} x = 1$ **b)** $2\cos x + 1 = 0$ **c)** $\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1 = 0$

a) El seno de un ángulo vale 1 en 90º, 450º, 810º, etc.

Por tanto $x = 90º + 360ºk$ con $k \in \mathbb{Z}$ o, en radianes, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

b) $2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 120º + 360º k = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ x = 240º + 360º k = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}$.

c) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 30º + 180º k = \frac{\pi}{6} + \pi k \ \forall k \in \mathbb{Z}$.

48. Resuelve las ecuaciones trigonométricas indicando las soluciones comprendidas en el intervalo [0, 2π].

a) $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$ **b)** $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x = 0$

a) $\operatorname{sen} x + \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 135º = \frac{3\pi}{4} \text{ rad} \\ x = 315º = \frac{7\pi}{4} \text{ rad} \end{cases}$

b) $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x(2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0º = 0 \text{ rad} \\ x = 180º = \pi \text{ rad} \\ x = 360º = 2\pi \text{ rad} \end{cases} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60º = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \\ x = 300º = \frac{5\pi}{3} \text{ rad} \end{cases} \end{cases}$

49. Resuelve, dando las soluciones en el intervalo [0, 2π].

a) $\operatorname{sen} 6x - 2\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x = 0$ **b)** $2\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x = 4\cos^2 x$

a) $\operatorname{sen}6x - 2\operatorname{sen}4x + \operatorname{sen}2x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}\frac{8x}{2}\cos\frac{4x}{2} - 2\operatorname{sen}4x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}4x\cos 2x - 2\operatorname{sen}4x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\operatorname{sen}4x(\cos 2x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}4x = 0 \Rightarrow 4x = 0º + 180º k \Rightarrow x = 0º + 45º k \\ \cos 2x = 1 \Rightarrow 2x = 0º + 360º k \Rightarrow x = 0º + 180º k \end{cases}$ con $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Y si nos ceñimos al intervalo, $x = 0º$; $x = 45º$; $x = 90º$; $x = 135º$; $x = 180º$; $x = 225º$; $x = 270º$; $x = 315º$; $x = 360º$

b) $2\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x = 4\cos^2 x \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 4\cos^2 x \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 4\cos^2 x \Rightarrow 1 = 4\cos^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow x = 60º$; $x = 120º$; $x = 240º$; $x = 300º$

50. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones en el intervalo [0, 2π].

a) $\begin{cases} \text{tg}(x+y)=\sqrt{3} \\ x+2y=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \text{sen}\,x-\text{sen}\,y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \text{sen}\,x+\text{sen}\,y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$

a) $\begin{cases} \text{tg}(x+y)=\sqrt{3} \\ x+2y=\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ x+2y=\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k \\ y=\dfrac{\pi}{6}-\pi k \end{cases} k\in\mathbb{Z}$

La única solución en el intervalo [0, 2π] es $x=\dfrac{\pi}{6},\ y=\dfrac{\pi}{6}$.

b) Haciendo el cambio $u=\text{sen}\,x$, $v=\text{sen}\,y$ tenemos:

$$\begin{cases} u-v=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ u+v=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ v=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\,x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen}\,y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Hay cuatro soluciones en el intervalo [0, 2π]: $x=\dfrac{\pi}{3},\ y=\dfrac{\pi}{6}$; $x=\dfrac{2\pi}{3},\ y=\dfrac{\pi}{6}$; $x=\dfrac{\pi}{3},\ y=\dfrac{5\pi}{6}$ y $x=\dfrac{2\pi}{3},\ y=\dfrac{5\pi}{6}$

51 a 54. Ejercicios resueltos.

55. Calcula la longitud del lado *c* de un triángulo *ABC* sabiendo que *a* = 10 cm, $\hat{A}=45^\circ$ y $\hat{B}=100^\circ$.

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}}=\frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} \Rightarrow c=\frac{a\,\text{sen}\,\hat{C}}{\text{sen}\,\hat{A}}=\frac{10\,\text{sen}\,35^\circ}{\text{sen}\,45^\circ}=8{,}11\ \text{cm}$$

56. Dado un triángulo *ABC* con *a* = 12 cm, *b* = 15 cm y $\hat{C}=35^\circ$.

a) ¿Cuál es la longitud del lado *c*?

b) ¿Cuál es su área?

a) Aplicando el teorema del coseno:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}=12^2+15^2-2\cdot 12\cdot 15\cos 35^\circ=74{,}105 \Rightarrow c=8{,}61\ \text{cm}$$

b) Área: $A=\dfrac{1}{2}ab\,\text{sen}\,\hat{C}=\dfrac{1}{2}\cdot 12\cdot 15\,\text{sen}\,35^\circ=51{,}62\ \text{cm}^2$

57. Resuelve los siguientes triángulos y calcula sus áreas.

a) $\hat{A} = 80^\circ$, $\hat{B} = 40^\circ$, $a = 8$ dm

b) $\hat{A} = 80^\circ$, $a = 10$ m, $b = 5$ m

c) $a = 10$ cm, $b = 15$ cm, $c = 20$ cm

d) $\hat{A} = 75^\circ$, $b = 8$ mm, $c = 12$ mm

a) $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 60^\circ$

Aplicando el teorema del seno dos veces:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow b = \frac{a\operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{8\operatorname{sen}40^\circ}{\operatorname{sen}80^\circ} = 5{,}22 \text{ dm}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow c = \frac{a\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{8\operatorname{sen}60^\circ}{\operatorname{sen}80^\circ} = 7{,}04 \text{ dm}$$

Área: $A = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5{,}22\cdot \operatorname{sen}60^\circ = 18{,}1 \text{ dm}^2$

b) Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b\operatorname{sen}\hat{A}}{a} = \frac{5\operatorname{sen}80^\circ}{10} \simeq 0{,}492 \Rightarrow \hat{B} = 29^\circ\ 29'\ 55{,}34''$$

(La posibilidad $\hat{B} = 150^\circ\ 31'\ 40''$ no es válida)

$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 70^\circ\ 30'\ 4{,}66''$

Aplicando el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} = 10^2 + 5^2 - 2\cdot 10\cdot 5\cos 70^\circ\ 30'\ 4{,}66'' = 91{,}621 \Rightarrow c \simeq 9{,}57 \text{ m}$$

Área: $A = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 5\cdot \operatorname{sen}70^\circ\ 30'\ 4{,}66'' \simeq 23{,}57 \text{ m}^2$

c) Aplicando el teorema del coseno dos veces:

$$\cos\hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{15^2 + 20^2 - 10^2}{2\cdot 15\cdot 20} = 0{,}875 \Rightarrow \hat{A} = 28^\circ\ 57'\ 18''$$

$$\cos\hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{10^2 + 20^2 - 15^2}{2\cdot 10\cdot 20} = 0{,}6875 \Rightarrow \hat{B} = 46^\circ\ 34'\ 3''$$

$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 104^\circ\ 28'\ 39''$

Área: $A = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 15\cdot \operatorname{sen}104^\circ 28' 39'' = 72{,}62 \text{ cm}^2$

d) Aplicando el teorema del coseno dos veces:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} = 8^2 + 12^2 - 2\cdot 8\cdot 12\cos 75^\circ = 158{,}307 \Rightarrow a = 12{,}58 \text{ mm}$$

$$\cos\hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{12{,}58^2 + 12^2 - 8^2}{2\cdot 12{,}58\cdot 12} = 0{,}789 \Rightarrow \hat{B} = 37^\circ\ 53'\ 42''$$

$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 67^\circ\ 6'\ 18''$

Área: $A = \frac{1}{2}bc\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 12\cdot \operatorname{sen}75^\circ = 46{,}36 \text{ mm}^2$

58. Ejercicio interactivo.

59 a 71. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Medida de ángulos

72. Copia y completa las siguientes tablas.

Grados	30º		60º	
Radianes		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$

Grados	210º		240º	
Radianes		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$

Grados		135º		180º
Radianes	$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	

Grados		315º		360º
Radianes	$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{11\pi}{6}$	

Grados	30º	45º	60º	90º
Radianes	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Grados	210º	225º	240º	270º
Radianes	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$

Grados	120º	135º	150º	180º
Radianes	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Grados	300º	315º	330º	360º
Radianes	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

73. Pasa de grados a radianes.

a) 585º **b)** 450º **c)** 76º 52′ 30″ **d)** 382º 30′

a) $585^\circ = \frac{585^\circ\pi}{180^\circ} = \frac{13\pi}{4}$ rad

b) $450^\circ = \frac{450^\circ\pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{2}$ rad

c) $76^\circ 52' 30'' = \frac{76{,}875^\circ\pi}{180^\circ} = \frac{41\pi}{96}$ rad

d) $382^\circ 30' = \frac{382{,}5^\circ\pi}{180^\circ} = \frac{17\pi}{8}$ rad

74. Los siguientes ángulos están en radianes, pásalos a grados.

a) $\frac{41\pi}{3}$ rad **b)** 13π rad **c)** $\frac{11\pi}{12}$ rad **d)** 5 rad

a) $\frac{41\pi}{3}\text{ rad} = \frac{41\pi\cdot 180^\circ}{3\pi} = 2460^\circ$

b) $13\pi\text{ rad} = \frac{13\pi\cdot 180^\circ}{\pi} = 2340^\circ$

c) $\frac{11\pi}{12}\text{ rad} = \frac{11\pi\cdot 180^\circ}{12\pi} = 165^\circ$

d) $5\text{ rad} = \frac{5\cdot 180^\circ}{\pi} = 286^\circ\, 28'\, 44''$

Razones trigonométricas

75. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los siguientes triángulos rectángulos.

a) $\hat{A} = 90º$, $a = 29$ cm, $b = 20$ cm **b)** $\hat{B} = 90º$, $a = 65$ cm, $c = 72$ cm

a) $c = \sqrt{29^2 - 20^2} = \sqrt{441} = 21$ cm

$\text{sen}\,\hat{B} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{20}{29}$ $\cos\hat{B} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{21}{29}$ $\text{tg}\,\hat{B} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{20}{21}$

$\text{sen}\,\hat{C} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{21}{29}$ $\cos\hat{C} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{20}{29}$ $\text{tg}\,\hat{C} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{21}{20}$

b) $b = \sqrt{65^2 + 72^2} = \sqrt{9409} = 97$ cm

$\text{sen}\,\hat{A} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{65}{97}$ $\cos\hat{A} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{72}{97}$ $\text{tg}\,\hat{A} = \dfrac{a}{c} = \dfrac{65}{72}$

$\text{sen}\,\hat{C} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{72}{97}$ $\cos\hat{C} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{65}{97}$ $\text{tg}\,\hat{C} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{72}{65}$

76. Indica los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas completas más el ángulo restante.

a) 2345º **b)** –1500º **c)** $\dfrac{46\pi}{3}$ rad **d)** $-\dfrac{52\pi}{7}$ rad

a) 2345º = 6 · 360º + 185º = 6 vueltas + 185º

b) –1500º = –5 · 360º + 300º = –5 vueltas + 300º

c) $\dfrac{46\pi}{3}$ rad $= 7 \cdot 2\pi + \dfrac{4\pi}{3}$ = 7 vueltas + $\dfrac{4\pi}{3}$ rad

d) $-\dfrac{52\pi}{7}$ rad $= -4 \cdot 2\pi + \dfrac{4\pi}{7}$ = –4 vueltas + $\dfrac{4\pi}{7}$ rad

77. Utiliza la calculadora para hallar el valor de las siguientes razones trigonométricas. Aproxima los resultados a las milésimas.

a) sen 36º **c)** cotg 111º **e)** sec 126º 33′

b) tg 331º **d)** sen 25º 40′ **f)** cotg 121º 22′ 45″

a) sen 36º = 0,588 **c)** cotg 111º = –0,384 **e)** sec 126º 33′ = –1,679

b) tg 331º = –0,554 **d)** sen 25º 40′ = 0,433 **f)** cotg 121º 22′ 45″ = –0,610

78. Utiliza la calculadora para hallar el valor de las siguientes razones trigonométricas. Aproxima los resultados a las milésimas. Ten en cuenta que todos los ángulos están dados en radianes.

a) sen $\dfrac{\pi}{12}$ **c)** cos $\dfrac{3\pi}{7}$ **e)** tg $\dfrac{21\pi}{5}$

b) cosec 2 **d)** sec 3 **f)** cotg 2,75

a) sen $\dfrac{\pi}{12} = 0{,}259$ **c)** cos $\dfrac{3\pi}{7} = 0{,}223$ **e)** tg $\dfrac{21\pi}{5} = 0{,}727$

b) cosec 2 = 1,100 **d)** sec 3 = –1,010 **f)** cotg 2,75 = –2,422

79. Calcula, de forma exacta, el valor de las siguientes razones trigonométricas.

a) sen 240º **d)** sen 1215º **g)** $\text{tg}\ \frac{7\pi}{3}$ **j)** cotg 225º

b) cos 135º **e)** cosec 330º **h)** $\sec\ \frac{5\pi}{3}$ **k)** $\text{sen}\ \frac{7\pi}{4}$

c) cos(–600º) **f)** tg 300º **i)** sec 120º **l)** $\text{tg}(-15\pi)$

a) $\text{sen}\,240^\circ = -\text{sen}\,60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos(-600^\circ) = \cos 600^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

d) $\text{sen}\,1215^\circ = \text{sen}\,135^\circ = \text{sen}\,45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\text{cosec}\,330^\circ = -\text{cosec}\ 30^\circ = -2$

f) $\text{tg}\,300^\circ = -\text{tg}\ 60^\circ = -\sqrt{3}$

g) $\text{tg}\frac{7\pi}{3} = \text{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

h) $\sec\frac{5\pi}{3} = \sec\frac{\pi}{3} = 2$

i) $\sec 120^\circ = -\sec 60^\circ = -2$

j) $\text{cotg}\ 225^\circ = \text{cotg}45^\circ = 1$

k) $\text{sen}\frac{7\pi}{4} = -\text{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

l) $\text{tg}(-15\pi) = -\text{tg}15\pi = -\text{tg}\,\pi = 0$

80. Calcula todas las razones trigonométricas del ángulo α sabiendo que:

a) Es un ángulo del primer cuadrante y $\cos\alpha = \frac{2}{3}$

b) Pertenece al segundo cuadrante y $\text{sen}\,\alpha = 0{,}25$

c) $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ y $\text{tg}\,\alpha = \sqrt{2}$

d) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ y $\sec\alpha = \sqrt{2}$

e) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ y $\text{cotg}\,\alpha = -3$

f) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ y $\text{cosec}\,\alpha = -\frac{5}{2}$

a) Al ser un ángulo del primer cuadrante, todas las razones son positivas. Tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \sec\alpha = \frac{3}{2}$$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \text{cosec}\,\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \text{cotg}\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

b) Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno y la cosecante son positivos y el resto de razones son negativas. Tenemos:

$$\operatorname{sen}\alpha = 0,25 = \frac{1}{4} \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = 4$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{1}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \sec\alpha = -\frac{4}{\sqrt{15}} = -\frac{4\sqrt{15}}{15}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{15}} = -\frac{\sqrt{15}}{15} \Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = -\sqrt{15}$$

c) Al ser un ángulo del tercer cuadrante, la tangente y la cotangente son positivos, y el resto de razones, negativas. Tenemos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha \Rightarrow \sec\alpha = -\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -\sqrt{1+2} = -\sqrt{3} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = -\frac{3}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

d) Al ser un ángulo del cuarto cuadrante, el coseno y la secante son positivos, y el resto de razones, negativas. Tenemos:

$$\sec\alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = -\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -1 \Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = -1$$

e) Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno y la cosecante son positivos y el resto de razones son negativas. Tenemos:

$$\operatorname{cotg}\alpha = -3 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha \Rightarrow \sec\alpha = -\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -\sqrt{1+\frac{1}{9}} = -\frac{\sqrt{10}}{3} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

f) Al ser un ángulo del tercer cuadrante, la tangente y la cotangente son positivos, y el resto de razones, negativas. Tenemos:

$$\operatorname{cosec}\alpha = -\frac{5}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{4}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5} \Rightarrow \sec\alpha = -\frac{5}{\sqrt{21}} = -\frac{5\sqrt{21}}{21}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21} \Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

81. Calcula, en función de *h*, el valor de cada una de las siguientes razones trigonométricas.

a) sen 123º, siendo sen 57º = *h*.
b) cos 220º, siendo tg 40º = *h*.
c) tg 260º, siendo sen 80º = *h*.
d) cos 250º, siendo sen 110º = *h*.
e) cos 247º, siendo sen 113º = *h*.
f) cosec 701º, siendo cotg 199º = *h*.
g) tg 290º, siendo sen 110º = *h*.
h) sen 83º, siendo cos 7º = *h*.
i) sec 203º, siendo cotg 67º = *h*.

a) $\operatorname{sen}123^\circ = \operatorname{sen}57^\circ = h$

b) $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos 220^\circ = -\sqrt{\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 220^\circ}} = -\sqrt{\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 40^\circ}} - \sqrt{\dfrac{1}{1+h^2}}$

c) $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{1-\operatorname{sen}^2\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}260^\circ = \sqrt{\dfrac{1}{1-\operatorname{sen}^2 260^\circ}-1} = \sqrt{\dfrac{1}{1-(-\operatorname{sen}80^\circ)^2}-1} = \sqrt{\dfrac{1}{1-h^2}-1} =$

$= \sqrt{\dfrac{h^2}{1-h^2}} = \dfrac{h}{\sqrt{1-h^2}}$

d) $\cos 250^\circ = \cos 110^\circ = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 110^\circ} = -\sqrt{1-h^2}$

e) $\cos 247^\circ = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 247^\circ} = -\sqrt{1-(-\operatorname{sen}113^\circ)^2} = -\sqrt{1-h^2}$

f) $\operatorname{cosec}701^\circ = \operatorname{cosec}341^\circ = -\operatorname{cosec}19^\circ = \operatorname{cosec}199^\circ = -\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 199^\circ} = -\sqrt{1+h^2}$

g) $\operatorname{tg}290^\circ = \operatorname{tg}110^\circ = \sqrt{\dfrac{1}{1-\operatorname{sen}^2 110^\circ}-1} = \sqrt{\dfrac{1}{1-h^2}-1} = \sqrt{\dfrac{h^2}{1-h^2}} = \dfrac{h}{\sqrt{1-h^2}}$

h) $\operatorname{sen}83^\circ = \cos 7^\circ = h$

i) $\sec 203^\circ = -\sec 23^\circ = \dfrac{-1}{\cos 23^\circ} = \dfrac{-1}{\operatorname{sen}67^\circ} = -\operatorname{cosec}67^\circ = -\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 67^\circ} = -\sqrt{1+h^2}$

82. Determina la razón trigonométrica que se indica en cada caso, expresándola en función de *h*.

a) $\operatorname{cosec}\dfrac{23\pi}{5}$, sabiendo que $\operatorname{cotg}\dfrac{3\pi}{5} = -h^2$.

b) $\sec 305^\circ$, sabiendo que $\operatorname{cotg}55^\circ = \dfrac{1}{h}$.

c) tg 348º, sabiendo que cos 192º $= -h^2$.

a) $\operatorname{cosec}\dfrac{23\pi}{5} = \operatorname{cosec}\dfrac{3\pi}{5} = \sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\dfrac{3\pi}{5}} = \sqrt{1+h^4}$

b) $\sec 305^\circ = \dfrac{1}{\cos 305^\circ} = \dfrac{1}{\cos 55^\circ} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 55^\circ}}} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 55^\circ} = \sqrt{1+h^2}$

c) $\operatorname{tg}348^\circ = -\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 348^\circ}-1} = -\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 12^\circ}-1} = -\sqrt{\dfrac{1}{(-\cos 192^\circ)^2}-1} = -\sqrt{\dfrac{1}{h^4}-1} = -\dfrac{\sqrt{1-h^4}}{h^2}$

83. Sabiendo que sen α = *h* y que α es un ángulo del primer cuadrante, calcula en función de *h*:

a) sen (90º – α)
b) tg (1080º – α)

a) 90º – α es también un ángulo del primer cuadrante ⇒ sen (90º – α) = cos α = $\sqrt{1-h^2}$

b) 1080º = 3 · 360º ⇒ tg (1080º – α) = tg (–α) = – tg α = $\dfrac{-h}{\sqrt{1-h^2}}$

84. Para un ángulo α del primer cuadrante, que cumple que tg α = *h*, calcula en función de h:

a) sen (90º – α) **b)** cotg (1080º – α)

a) sen (90º – α) = cos α = $\sqrt{\dfrac{1}{1+tg^2\alpha}} = \sqrt{\dfrac{1}{1+h^2}}$

b) cotg (1080º – α) = cotg (–α) = –cotg α = $-\dfrac{1}{h}$

85. Sabiendo que cosec *x* = $-\dfrac{7}{4}$, calcula:

a) sen (810º – *x*) **b)** sec $\left(\dfrac{17\pi}{2}-x\right)$

Observemos que *x* está en el tercer o cuarto cuadrante, por tanto, 810º – *x* y $\dfrac{17\pi}{2}-x$ están en el segundo o tercer cuadrante, por lo que no se puede saber el signo de cos *x*.

a) $\text{sen}(810^\circ - x) = \text{sen}(90^\circ - x) = \cos x = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x} = \pm\sqrt{1-\dfrac{1}{\text{cosec}^2 x}} = \pm\dfrac{\sqrt{33}}{7}$

b) $\sec\left(\dfrac{17\pi}{2}-x\right) = \sec\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)} = \dfrac{1}{\text{sen}\, x} = \text{cosec}\, x = -\dfrac{7}{4}$

86. Demuestra que tg (270º – *x*) = cotg *x*.

tg (270º – *x*) = tg (180º + 90º – *x*) = tg (90º – *x*)= cotg *x*.

87. Desarrolla, en función de sen α y cos α, las expresiones de sen 4α, cos 4α y tg 4α.

$$\text{sen}\,4\alpha = \text{sen}(2\cdot 2\alpha) = 2\,\text{sen}\,2\alpha\cos 2\alpha = 2\cdot 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\cdot\left(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha\right) = 4\,\text{sen}\,\alpha\cos^3\alpha - 4\,\text{sen}^3\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 4\alpha = \cos(2\cdot 2\alpha) = \cos^2 2\alpha - \text{sen}^2 2\alpha = \left(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha\right)^2 - (2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha)^2 = \cos^4\alpha + \text{sen}^4\alpha - 6\,\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$\text{tg}\,4\alpha = \frac{\text{sen}\,4\alpha}{\cos 4\alpha} = \frac{4\,\text{sen}\,\alpha\cos^3\alpha - 4\,\text{sen}^3\alpha\cos\alpha}{\cos^4\alpha + \text{sen}^4\alpha - 6\,\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}$$

88. Si $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ y $\pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$ y, siendo $\text{sen}\,\alpha = 0,4$ y $\cos\beta = -0,5$, calcula:

a) $\text{sen}(\alpha-\beta)$ **b)** $\cos(\alpha+\beta)$ **c)** $\text{tg}(\alpha+\beta)$

$\cos\alpha = -\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} = -0,917$ y $\text{sen}\,\beta = -\sqrt{1-\cos^2\beta} = -0,866$

a) $\text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta = -0,4\cdot 0,5 - 0,917\cdot 0,866 = -0,994$

b) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta = 0,917\cdot 0,5 + 0,4\cdot 0,866 = 0,805$

c) $\text{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1-\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta} = \dfrac{-\dfrac{0,4}{0,917}+\dfrac{0,866}{0,5}}{1+\dfrac{0,4}{0,917}\cdot\dfrac{0,866}{0,5}} = 0,738$

89. Sabiendo que tg $\alpha = 3$, calcula las razones trigonométricas del ángulo 2α si α es un ángulo:

a) Del primer cuadrante

b) Del tercer cuadrante

a) Al ser tg α >1, 45º < α < 90º y por tanto, 2α pertenece al segundo cuadrante. Tenemos:

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\text{tg}^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1+9}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \qquad \text{sen}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{sen}\,2\alpha = 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10}\cdot\frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = \frac{1}{10} - \frac{9}{10} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5} = -0,8$$

$$\text{tg}\,2\alpha = \frac{\text{sen}\,2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{3}{4} = -0,75$$

b) Al ser tg α >1, 225º < α < 270º y, por tanto, 2α pertenece al segundo cuadrante y se obtienen los mismos valores del apartado anterior para las razones de 2α.

90. Calcula el valor de la tangente de α, sabiendo que es un ángulo del primer cuadrante y que $\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$.

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \text{tg}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\text{sen}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \text{sen}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{8}}{3}}{\frac{8}{9}-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{8}}{7}$$

91. Calcula, de forma exacta, las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.

a) 15º

b) 7º 30′

a) $$\text{sen}\,15^\circ = \text{sen}\left(\frac{30^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos 15^\circ = \cos\left(\frac{30^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\text{tg}\,15^\circ = \frac{\text{sen}\,15^\circ}{\cos 15^\circ} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}} = 2-\sqrt{3}$$

b) $$\text{sen}\,7^\circ 30' = \text{sen}\left(\frac{15^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 15^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$$

$$\cos 7^\circ 30' = \cos\left(\frac{15^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos 15^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$$

$$\text{tg}\,7^\circ 30' = \frac{\text{sen}\,7^\circ\,15'}{\cos 7^\circ\,15'} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2}{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}} = \frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

92. Si $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ y 90º < α < 180º, calcula las razones trigonométricas de $\frac{\alpha}{2}$.

$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{2}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$ $\qquad$ $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{\sqrt{30}}{6}}{\frac{\sqrt{6}}{6}} = \sqrt{5}$

93. Transforma en producto las siguientes sumas de razones trigonométricas.

a) sen 48º + sen 32º $\qquad$ **c)** $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$ $\qquad$ **e)** cos 23º – cos 57º

b) cos 200º + cos 40º $\qquad$ **d)** sen 105º – sen 25º $\qquad$ **f)** $\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{9}$

a) $\operatorname{sen}48^\circ + \operatorname{sen}32^\circ = 2\operatorname{sen}\frac{48^\circ+32^\circ}{2}\cos\frac{48^\circ-32^\circ}{2} = 2\operatorname{sen}40^\circ\cos8^\circ$

b) $\cos200^\circ + \cos40^\circ = 2\cos\frac{200^\circ+40^\circ}{2}\cos\frac{200^\circ-40^\circ}{2} = 2\cos120^\circ\cos80^\circ$

c) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{5} = 2\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{5}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}}{2} = 2\operatorname{sen}\frac{4\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15}$

d) $\operatorname{sen}105^\circ - \operatorname{sen}25^\circ = 2\cos\frac{105^\circ+25^\circ}{2}\operatorname{sen}\frac{105^\circ-25^\circ}{2} = 2\cos65^\circ\operatorname{sen}40^\circ$

e) $\cos23^\circ - \cos57^\circ = -2\operatorname{sen}\frac{23^\circ+57^\circ}{2}\operatorname{sen}\frac{23^\circ-57^\circ}{2} = -2\operatorname{sen}40^\circ\operatorname{sen}(-17^\circ) = 2\operatorname{sen}40^\circ\operatorname{sen}17^\circ$

f) $\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{9} = -2\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{9}}{2}\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{9}}{2} = -2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{9}\operatorname{sen}\frac{\pi}{9}$

94. Transforma en suma los siguientes productos de razones trigonométricas.

a) 2 sen 33º cos 11º $\qquad$ **b)** cos 95º cos 38º $\qquad$ **c)** sen 50º cos 75º $\qquad$ **d)** sen 119º sen 25º

a) $33^\circ = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2};\ 11^\circ = \frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 44^\circ;\ \hat{B} = 22^\circ$, luego 2 sen 33º cos 11º = sen 44º + sen 22º

b) $95^\circ = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2};\ 38^\circ = \frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 133^\circ;\ \hat{B} = 57^\circ$, luego $\cos 95^\circ \cos 38^\circ = \frac{1}{2}(\cos133^\circ + \cos57^\circ)$

c) $50^\circ = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2};\ 75^\circ = \frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 125^\circ;\ \hat{B} = -25^\circ$, luego:

$\operatorname{sen}50^\circ\cos75^\circ = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}125^\circ + \operatorname{sen}(-25^\circ)) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}125^\circ - \operatorname{sen}25^\circ)$

d) $119^\circ = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2};\ 25^\circ = \frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 144^\circ;\ \hat{B} = 94^\circ$, luego $\operatorname{sen}119^\circ\operatorname{sen}25^\circ = -\frac{1}{2}(\cos144^\circ - \cos94^\circ)$

95. Expresa las siguientes sumas como productos.

a) sen $4\alpha + $ sen 2α

b) sen $3\alpha -$ sen α

c) cos $6\alpha + $ cos 4α

d) cos $8\alpha -$ cos 2α

a) $\text{sen}\,4\alpha + \text{sen}\,2\alpha = 2\,\text{sen}\frac{4\alpha + 2\alpha}{2}\cos\frac{4\alpha - 2\alpha}{2} = 2\,\text{sen}\,3\alpha\cos\alpha$

b) $\text{sen}\,3\alpha - \text{sen}\,\alpha = 2\cos\frac{3\alpha + \alpha}{2}\,\text{sen}\frac{3\alpha - \alpha}{2} = 2\cos 2\alpha\,\text{sen}\,\alpha$

c) $\cos 6\alpha + \cos 4\alpha = 2\cos\frac{6\alpha + 4\alpha}{2}\cos\frac{6\alpha - 4\alpha}{2} = 2\cos 5\alpha\cos\alpha$

d) $\cos 8\alpha - \cos 2\alpha = -2\,\text{sen}\frac{8\alpha + 2\alpha}{2}\,\text{sen}\frac{8\alpha - 2\alpha}{2} = -2\,\text{sen}\,5\alpha\,\text{sen}\,3\alpha$

96. Demuestra que:

a) $\text{cotg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{cotg}\,\alpha\,\text{cotg}\,\beta - 1}{\text{cotg}\,\beta + \text{cotg}\,\alpha}$

b) $\text{cotg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{cotg}\,\alpha\,\text{cotg}\,\beta + 1}{\text{cotg}\,\beta - \text{cotg}\,\alpha}$

a) $\text{cotg}(\alpha + \beta) = \frac{1}{\text{tg}(\alpha + \beta)} = \frac{1}{\frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}} = \frac{1 - \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta} = \frac{1 - \frac{1}{\text{cotg}\,\alpha}\cdot\frac{1}{\text{cotg}\,\beta}}{\frac{1}{\text{cotg}\,\alpha} + \frac{1}{\text{cotg}\,\beta}} = \frac{\frac{\text{cotg}\,\alpha\,\text{cotg}\,\beta - 1}{\text{cotg}\,\alpha\,\text{cotg}\,\beta}}{\frac{\text{cotg}\,\beta + \text{cotg}\,\alpha}{\text{cotg}\,\alpha\,\text{cotg}\,\beta}} = \frac{\text{cotg}\,\alpha\,\text{cotg}\,\beta - 1}{\text{cotg}\,\beta + \text{cotg}\,\alpha}$

b) $\text{cotg}(\alpha - \beta) = \frac{1}{\text{tg}(\alpha - \beta)} = \frac{1}{\frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 + \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}} = \frac{1 + \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta} = \frac{1 + \frac{1}{\text{cotg}\,\alpha}\cdot\frac{1}{\text{cotg}\,\beta}}{\frac{1}{\text{cotg}\,\alpha} - \frac{1}{\text{cotg}\,\beta}} = \frac{\frac{\text{cotg}\,\alpha\,\text{cotg}\,\beta + 1}{\text{cotg}\,\alpha\,\text{cotg}\,\beta}}{\frac{\text{cotg}\,\beta - \text{cotg}\,\alpha}{\text{cotg}\,\alpha\,\text{cotg}\,\beta}} = \frac{\text{cotg}\,\alpha\,\text{cotg}\,\beta + 1}{\text{cotg}\,\beta - \text{cotg}\,\alpha}$

97. Desarrolla las siguientes expresiones.

a) sen $(\alpha + \beta + \gamma)$

b) cos $(\alpha + \beta - \gamma)$

c) sen $(2\alpha + \beta)$

d) cos $(\alpha - 2\beta)$

a) $\text{sen}(\alpha + \beta + \gamma) = \text{sen}\big(\alpha + (\beta + \gamma)\big) = \text{sen}\,\alpha\cos(\beta + \gamma) + \cos\alpha\,\text{sen}(\beta + \gamma) =$

$= \text{sen}\,\alpha\cos\beta\cos\gamma - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,\gamma + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\,\text{sen}\,\gamma =$

$= \text{sen}\,\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\,\text{sen}\,\gamma - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,\gamma$

b) $\cos(\alpha + \beta - \gamma) = \cos\big(\alpha + (\beta - \gamma)\big) = \cos\alpha\cos(\beta - \gamma) - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}(\beta - \gamma) =$

$= \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,\gamma - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta\cos\gamma + \text{sen}\,\alpha\cos\beta\,\text{sen}\,\gamma =$

$= \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,\gamma + \text{sen}\,\alpha\cos\beta\,\text{sen}\,\gamma - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta\cos\gamma$

c) $\text{sen}(2\alpha + \beta) = \text{sen}\,2\alpha\cos\beta + \cos 2\alpha\,\text{sen}\,\beta = 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha\,\text{sen}\,\beta - \text{sen}^2\alpha\,\text{sen}\,\beta$

d) $\cos(\alpha - 2\beta) = \cos\alpha\cos 2\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,2\beta = \cos\alpha(\cos^2\beta - \text{sen}^2\beta) + 2\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta\cos\beta =$

$= \cos\alpha\cos^2\beta - \cos\alpha\,\text{sen}^2\beta + 2\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta\cos\beta$

Identidades trigonométricas

98. Demuestra las siguientes identidades trigonométricas.

a) $\frac{\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-1}=\cos\alpha$ **b)** $\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{sen}^2\alpha$ **c)** $\frac{1+\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}=\operatorname{cosec}\alpha$ **d)** $\sec^2\alpha-1=\operatorname{tg}^2\alpha$

a) $\frac{\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-1}=\frac{\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha}{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}-1}=\frac{\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha}{\frac{\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{(\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha)\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha}=\cos\alpha$

b) $\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)}{\cos^2\alpha}=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}\operatorname{sen}^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{sen}^2\alpha$

c) $\frac{1+\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}=\frac{1+\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}=\frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}=\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}=\operatorname{cosec}\alpha$

d) $\sec^2\alpha-1=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha$

99. Demuestra las siguientes igualdades trigonométricas.

a) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha$

b) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha=\sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha$

c) $\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$

d) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\operatorname{tg}2\alpha$

e) $\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\beta=\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$

f) $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta)^2=4\operatorname{sen}^2\frac{\alpha+\beta}{2}$

g) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2}=\operatorname{tg}2\alpha$

h) $\frac{1-\cos 2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha}-\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{tg}\alpha$

a) $\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}-\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{2}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}-1\right)=\operatorname{tg}\alpha\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\frac{1+\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1-\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\operatorname{tg}\alpha\frac{\frac{\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos 2\alpha}$

b) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}=\sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha$

c) $\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$

d) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha}-\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{4\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=2\operatorname{tg}2\alpha$

e) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta)(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta)=\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta=$

$\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\beta-(1-\operatorname{sen}^2\alpha)\operatorname{sen}^2\beta=\operatorname{sen}^2\alpha(\cos^2\beta+\operatorname{sen}^2\beta)-\operatorname{sen}^2\beta=\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\beta$

f) $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta)^2=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}^2\beta+2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=$

$=2-2\left(\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=2-2\left(1-2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=4\operatorname{sen}^2\frac{\alpha+\beta}{2}$

g) La expresión es equivalente a la demostrada en el aparatado d.

h) $\frac{1-\cos 2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha}-\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha}-\frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{2\operatorname{sen}^2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha}-\frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{tg}\alpha$

100. Simplifica las expresiones trigonométricas dadas.

a) $(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)^2$

b) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta)$

c) $\operatorname{sen}2\alpha(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha)$

d) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}$

e) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}\cdot\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

a) $(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)^2 = \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 2$

b) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta) = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta}\right) = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\dfrac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$

c) $\operatorname{sen}2\alpha(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\left(\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\left(\dfrac{1}{\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}\right) = 2$

d) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\cos\alpha} + 1\right) = \dfrac{1-\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}\left(\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha} + 1\right) =$

$= \dfrac{(1-\operatorname{sen}\alpha)(1+\operatorname{sen}\alpha)}{1-\operatorname{sen}\alpha}\left(\dfrac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{1-\cos\alpha} + 1\right) = (1+\operatorname{sen}\alpha)(2+\cos\alpha)$

e) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}\cdot\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}\cdot\dfrac{1-\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}} - \dfrac{1-\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}} =$

$= \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}\cdot\dfrac{(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} - \dfrac{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha} = 1 - \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 2\operatorname{sen}^2\alpha$

101. Simplifica las siguientes expresiones utilizando las fórmulas de transformación de sumas en productos.

a) $\dfrac{\operatorname{sen}8\alpha + \operatorname{sen}2\alpha}{2\cos3\alpha}$

b) $\dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}$

c) $\dfrac{2\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}5\alpha - \operatorname{sen}3\alpha}$

d) $\dfrac{\cos2\alpha + \cos\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha + \operatorname{sen}\alpha}$

a) $\dfrac{\operatorname{sen}8\alpha + \operatorname{sen}2\alpha}{2\cos3\alpha} = \dfrac{2\operatorname{sen}5\alpha\cos3\alpha}{2\cos3\alpha} = \operatorname{sen}5\alpha$

b) $\dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} = \dfrac{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}} = \dfrac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$

c) $\dfrac{2\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}5\alpha - \operatorname{sen}3\alpha} = \dfrac{2\operatorname{sen}\alpha}{2\cos4\alpha\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{1}{\cos4\alpha}$

d) $\dfrac{\cos2\alpha + \cos\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha + \operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{2\cos\dfrac{3\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{3\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{\cos\dfrac{3\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{3\alpha}{2}} = \operatorname{cotg}\dfrac{3\alpha}{2}$

102. Demuestra que $\cos x = \cos^4\left(\dfrac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^4\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

$$\cos^4\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^4\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\cos x}{2}\right)^2 = \frac{1+\cos^2 x + 2\cos x}{4} - \frac{1+\cos^2 x - 2\cos x}{4} = \cos x$$

Ecuaciones trigonométricas

103. Con ayuda de la calculadora, halla la medida en grados del ángulo α del primer cuadrante tal que:

a) sen $\alpha = 0{,}345$ **c)** cos $\alpha = 0{,}553$ **e)** sec $\alpha = 0{,}442$

b) cosec $\alpha = 0{,}3$ **d)** tg $\alpha = 0{,}25$ **f)** cotg $\alpha = 0{,}01$

a) sen $\alpha = 0{,}345 \Rightarrow \alpha = 20^\circ\ 10'\ 54''$

b) cosec $\alpha = 0{,}3 \Rightarrow$ No existe ningún ángulo

c) cos $\alpha = 0{,}553 \Rightarrow \alpha = 56^\circ\ 25'\ 37''$

d) tg $\alpha = 0{,}25 \Rightarrow \alpha = 14^\circ\ 2'\ 10''$

e) sec $\alpha = 0{,}442 \Rightarrow$ No existe ningún ángulo

f) cotg $\alpha = 0{,}01 \Rightarrow \alpha = 89^\circ\ 25'\ 37''$

104. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas indicando todas sus soluciones en grados.

a) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ **d)** $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **g)** $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **e)** $\cos x = -\frac{1}{2}$ **h)** $\operatorname{sen} x = 0$

c) $\operatorname{tg} x = 1$ **f)** $1 + \cos x = 0$ **i)** $\operatorname{tg} x = 0$

a) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}$

c) $\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ + 360^\circ k \\ x = 225^\circ + 360^\circ k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 45^\circ + 180^\circ k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

d) $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 225^\circ + 360^\circ k \\ x = 315^\circ + 360^\circ k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}$

e) $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 120^\circ + 360^\circ k \\ x = 240^\circ + 360^\circ k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}$

f) $1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = 180^\circ + 360^\circ k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

g) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 150^\circ + 360^\circ k \\ x = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 150^\circ + 180^\circ k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

h) $\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 180^\circ k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

i) $\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = 180^\circ k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

105. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas indicando todas sus soluciones en radianes.

a) $\operatorname{sen} 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $\operatorname{tg} 3x = -1$ **d)** $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = 0$ **e)** $\cos\frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$ **f)** $\operatorname{tg}\frac{3x}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

a) $\operatorname{sen} 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 4x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \\ 4x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}k \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k \end{cases}$

b) $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 2x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \pi k \\ x = \frac{7\pi}{8} + \pi k \end{cases}$

c) $\operatorname{tg} 3x = -1 \Rightarrow \begin{cases} 3x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ 3x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3} \\ x = \frac{7\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases}$

d) $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \pi k \Rightarrow x = 2\pi k$

e) $\cos\frac{x}{3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ \frac{x}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\pi + 6\pi k \\ x = 4\pi + 6\pi k \end{cases}$

f) $\operatorname{tg}\frac{3x}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \\ \frac{3x}{4} = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{10\pi}{9} + \frac{8\pi k}{3} \\ x = \frac{22\pi}{9} + \frac{8\pi k}{3} \end{cases}$

106. Halla todas las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) sen $x = \cos x$

b) sen $2x - \text{sen } x = 0$

c) sen $x - \sqrt{3}\cos x = 0$

d) sen $x + \cos x = \sqrt{2}$

a) $\operatorname{sen} x = \cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = 45° + 180° k$

b) $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x(2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 180° k \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60° + 360° k \\ x = 300° + 360° k \end{cases} \end{cases}$

c) $\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow x = 60° + 180° k$

d) $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 2 \Rightarrow 1 + 2\operatorname{sen} x \cos x = 2 \Rightarrow 2\operatorname{sen} x \cos x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} 2x = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x = 90° + 360° k \Rightarrow x = 45° + 180° k$

Al elevar al cuadrado aparecen soluciones falsas con k impar. La solución es $x = 45° + 360° k$ con $k = 0, 1, 2...$

107. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo [0º, 360º].

a) tg $x + \text{cotg } x = 5$

b) tg $2x = \text{cotg } x$

c) $8\cos 2x = 8\cos x - 9$

d) $2\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x = 4\cos^2 x$

a) $\operatorname{tg} x + 4\operatorname{cotg} x = 5 \Rightarrow \operatorname{tg} x + \dfrac{4}{\operatorname{tg} x} = 5 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + 4 = 5\operatorname{tg} x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 75°\ 57'\ 50'' \\ x = 255°\ 57'\ 50'' \end{cases} \\ \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 45° \\ x = 225° \end{cases} \end{cases}$

b) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{cotg} x \Rightarrow \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} \Rightarrow 2\operatorname{tg}^2 x = 1 - \operatorname{tg}^2 x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 30° \\ x = 210° \end{cases} \\ \operatorname{tg} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 150° \\ x = 330° \end{cases} \end{cases}$

c) $8\cos 2x = 8\cos x - 9 \Rightarrow 8\cos^2 x - 8\operatorname{sen}^2 x - 8\cos x + 9 = 0 \Rightarrow 8\cos^2 x - 8 + 8\cos^2 x - 8\cos x + 9 = 0 \Rightarrow$

$16\cos^2 x - 8\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 75°\ 31'\ 21'' \\ x = 284°\ 28'\ 39'' \end{cases}$

d) $2\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x = 4\cos^2 x \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 4\cos^2 x \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 4\cos^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = 4\cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60° \\ x = 300° \end{cases} \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 120° \\ x = 240° \end{cases} \end{cases}$

108. Halla, para el intervalo [0, 2π], las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) $\text{sen}^2 x + \text{tg}^2 x = 0$ **b)** $\cos 2x - \text{sen}\, x = \text{sen}\, 2x - \cos x$ **c)** $2\,\text{sen}\, x + \sqrt{3}\,\text{tg}\, x = 0$

a) $\text{sen}^2 x + \text{tg}^2 x = 0 \Rightarrow \text{sen}^2 x\left(1+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}^2 x = 0 \Rightarrow \text{sen}\, x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi \\ 1+\dfrac{1}{\cos^2 x} = 0 \Rightarrow \text{Sin solución real} \end{cases}$

b) $\cos 2x - \text{sen}\, x = \text{sen}\, 2x - \cos x \Rightarrow \cos 2x + \cos x = \text{sen}\, 2x + \text{sen}\, x \Rightarrow 2\cos\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = 2\,\text{sen}\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\dfrac{x}{2}\left[\cos\dfrac{3x}{2} - \text{sen}\dfrac{3x}{2}\right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{x}{2} = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \pi,\ x = 3\pi \text{ (No vale pues } 3\pi \notin [0, 2\pi]) \\ \cos\dfrac{3x}{2} - \text{sen}\dfrac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \text{tg}\dfrac{3x}{2} = 1 \Rightarrow \dfrac{3x}{2} = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3x}{2} = \dfrac{5\pi}{4} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6},\ x = \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$

c) $2\,\text{sen}\, x + \sqrt{3}\,\text{tg}\, x = 0 \Rightarrow 2\,\text{sen}\, x + \sqrt{3}\dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \text{sen}\, x\left(2+\dfrac{\sqrt{3}}{\cos x}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\, x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi \\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{6},\ x = \dfrac{7\pi}{6} \end{cases}$

109. Calcula, para las ecuaciones propuestas, las soluciones pertenecientes al intervalo [−π, π].

a) $\cos 3x = 1 + \cos 2x$

b) $\text{sen}\, 3x + \text{sen}\, 6x = 0$

c) $\cos 5x + \cos 3x = \cos x$

d) $\sqrt{3}\cos x + \text{sen}\, x = 2$

a) $\cos 3x = 1+\cos 2x \Rightarrow \cos(2x+x) = 1+\cos^2 x - \text{sen}^2 x \Rightarrow \cos 2x\cos x - \text{sen}\, 2x\,\text{sen}x = 2\cos^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^3 x - \text{sen}^2 x\cos x - 2\,\text{sen}^2 x\cos x = 2\cos^2 x \Rightarrow \cos x\left(\cos^2 x - 3\,\text{sen}^2 x - 2\cos x\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x\left(\cos^2 x - 3 + 3\cos^2 x - 2\cos x\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{2},\ x = \dfrac{\pi}{2} \\ 4\cos^2 x - 2\cos x - 3 = 0 \Rightarrow \cos x = -0{,}6514 \Rightarrow x = 2{,}28,\ x = -2{,}28 \end{cases}$

b) $\text{sen}\, 3x + \text{sen}\, 6x = 0 \Rightarrow 2\,\text{sen}\dfrac{9x}{2}\cos\dfrac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\dfrac{9x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -\dfrac{2\pi}{9},\ x = \dfrac{2\pi}{9} \\ \cos\dfrac{3x}{2} = 0 \Rightarrow x = \pi,\ x = -\dfrac{\pi}{3},\ x = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

c) $\cos 5x + \cos 3x = \cos x \Rightarrow 2\cos 4x\cos x = \cos x \Rightarrow \cos x(2\cos 4x - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2},\ x = -\dfrac{\pi}{2} \\ \cos 4x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{12},\ x = \dfrac{\pi}{12},\ x = -\dfrac{\pi}{12},\ x = -\dfrac{5\pi}{12} \end{cases}$

d) $\sqrt{3}\cos x + \text{sen}\, x = 2 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \dfrac{1}{2}\text{sen}\, x = 1 \Rightarrow \text{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$

110. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones trigonométricas en el intervalo [0, 360º].

a) $\begin{cases} \text{sen}^2 x + \cos^2 y = \frac{5}{4} \\ \text{sen}^2 x - \cos^2 y = \frac{3}{4} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ x + y = 90º \end{cases}$

c) $\begin{cases} \text{sen}\, x \cos y = \frac{1}{4} \\ \cos x\, \text{sen}\, y = \frac{1}{4} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \text{tg}\, x + \text{tg}\, y = 2 \\ x - y = \pi \end{cases}$

a) $\begin{cases} \text{sen}^2 x + \cos^2 y = \frac{5}{4} \\ \text{sen}^2 x - \cos^2 y = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \text{sen}\, x = \pm 1 \\ \cos^2 y = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 90º\,, y = 45º \\ x = 90º\,, y = 135º \\ x = 90º\,, y = 225º \\ x = 90º\,, y = 315º \\ x = 270º\,, y = 45º \\ x = 270º\,, y = 135º \\ x = 270º\,, y = 225º \\ x = 270º\,, y = 315º \end{cases}$

b) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ x + y = 90º \end{cases} \Rightarrow 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1 \Rightarrow 2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1 \Rightarrow \cos\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x-y}{2} = 45º \Rightarrow x - y = 90º \\ \frac{x-y}{2} = 315º \Rightarrow x - y = 630º \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 90º \\ x - y = 90º \end{cases} \Rightarrow x = 90º,\ y = 0º$

c) $\begin{cases} \text{sen}\, x \cos y = \frac{1}{4} \\ \cos x\, \text{sen}\, y = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(\text{sen}(x+y) + \text{sen}(x-y)) = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}(\text{sen}(x+y) - \text{sen}(x-y)) = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}(x+y) + \text{sen}(x-y) = \frac{1}{2} \\ \text{sen}(x+y) - \text{sen}(x-y) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}(x+y) = \frac{1}{2} \\ \text{sen}(x-y) = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 30º \\ x - y = 0º \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x + y = 150º \\ x - y = 180º \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x + y = 390º \\ x - y = -180º \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x + y = 510 \\ x - y = -180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15º\,, y = 15º \\ x = 75º\,, y = 75º \\ x = 285º\,, y = 105º \\ x = 105º\,, y = 285º \\ x = 165º\,, y = 345º \\ x = 345º\,, y = 165º \end{cases}$

d) $\begin{cases} \text{tg}\, x + \text{tg}\, y = 2 \\ x - y = \pi \end{cases} \Rightarrow \text{tg}\, x + \text{tg}(x - \pi) = 2 \Rightarrow \text{tg}\, x + \text{tg}\, x = 2 \Rightarrow \text{tg}\, x = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4},\ y = \frac{\pi}{4}$

111. Halla todas las soluciones de la siguiente ecuación: $\text{sen}\, x + \text{sen}\, 3x + 4\cos^3 x = 0$

$\text{sen}\, x + \text{sen}\, 3x + 4\cos^3 x = 0 \Rightarrow 2\,\text{sen}\frac{4x}{2}\cos\frac{2x}{2} + 4\cos^3 x = 0 \Rightarrow 2\,\text{sen}\, 2x \cos x + 4\cos^3 x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cos x\left(\text{sen}\, 2x + 2\cos^2 x\right) = 0 \Rightarrow\Rightarrow 2\cos x\left(2\,\text{sen}\, x \cos x + 2\cos^2 x\right) = 0 \Rightarrow 4\cos^2 x\left(\text{sen}\, x + \cos x\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 90º + 360º k \\ x = 270º + 360º k \end{cases} \\ \text{sen}\, x + \cos x = 0 \Rightarrow \text{tg}\, x = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 135º + 360º k \\ x = 315º + 360º k \end{cases} \Rightarrow x = 135º + 180º k \end{cases}$

112. Resuelve este sistema en el intervalo [0, 2π]: $\begin{cases} \textbf{sen}\, \boldsymbol{x} + \textbf{sen}\, \boldsymbol{y} = \mathbf{1} \\ \textbf{cos}\, \boldsymbol{x} + \textbf{cos}\, \boldsymbol{y} = \mathbf{1} \end{cases}$

Elevando al cuadrado las ecuaciones y sumando miembro a miembro los resultados:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x + \text{sen}^2 y + \cos^2 y + 2(\text{sen}\, x\, \text{sen}\, y + \cos x \cos y) = 2 \Rightarrow 1 + 1 + 2\cos(x - y) = 2 \Rightarrow \cos(x - y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = y + \dfrac{\pi}{2} \\ y - x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow y = x + \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Sustituyendo la primera condición en la primera ecuación:

$$\text{sen}\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \text{sen}\, y = 1 \Rightarrow \cos y + \text{sen}\, y = 1 \Rightarrow \sqrt{1 - \text{sen}^2 y} = 1 - \text{sen}\, y \Rightarrow 1 - \text{sen}^2 y = 1 + \text{sen}^2 y - 2\,\text{sen}\, y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\,\text{sen}^2 y - 2\,\text{sen}\, y = 0 \Rightarrow 2\,\text{sen}\, y(\text{sen}\, y - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\, y = 0 \Rightarrow y = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2} \\ \text{sen}\, y = 1 \Rightarrow y = \dfrac{\pi}{2},\ x = \pi \text{ (Falsa)} \end{cases}$$

De la misma forma, sustituyendo la segunda condición, se obtiene también la solución $x = 0,\ y = \dfrac{\pi}{2}$.

Resolución de triángulos

113. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos.

a) $\hat{A} = 90°$, $a = 25$ mm, $c = 14$ mm

b) $\hat{B} = 90°$, $a = 28$ cm, $c = 45$ cm

c) $\hat{C} = 90°$, $\hat{A} = 20°$, $a = 12$ dm

d) $\hat{B} = 90°$, $\hat{A} = 15°$, $b = 15$ m

a) $b = \sqrt{25^2 - 14^2} = 20{,}71$ mm $\quad \text{sen}\,\hat{C} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{14}{25} \Rightarrow \hat{C} = 34°\ 3'\ 21''$ $\quad \hat{B} = 90° - \hat{C} = 55°\ 56'\ 39''$

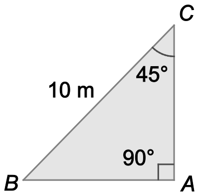
c) $\hat{B} = 90° - \hat{A} = 70°$ $\quad \text{sen}\,\hat{A} = \dfrac{12}{c} \Rightarrow c = 35{,}09$ dm $\quad \text{tg}\,\hat{A} = \dfrac{12}{b} \Rightarrow b = 32{,}97$ dm

d) $\hat{C} = 90° - \hat{A} = 75°$ $\quad \text{sen}\,\hat{A} = \dfrac{a}{15} \Rightarrow a = 3{,}88$ m $\quad \cos\hat{A} = \dfrac{c}{15} \Rightarrow c = 14{,}49$ m

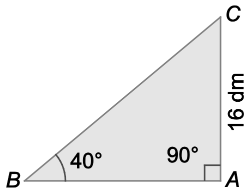
114. Calcula el área de cada uno de estos triángulos rectángulos.

a) $\hat{A} = 90°$, $a = 73$ mm, $c = 55$ mm

b)



c)



a) $b = \sqrt{73^2 - 55^2} = 48 \Rightarrow$ Área: $S = \dfrac{55 \cdot 48}{2} = 1320\ \text{mm}^2$

b) $b = c;\ c = 10\,\text{sen}\, 45° = 5\sqrt{2}$ m $\Rightarrow$ Área: $S = \dfrac{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}}{2} = 25\ \text{m}^2$

c) $c = \dfrac{16}{\text{tg}\, 40°} = 19{,}07$ dm $\Rightarrow$ Área: $S = \dfrac{19{,}07 \cdot 16}{2} = 152{,}56\ \text{dm}^2$

115. Resuelve los siguientes triángulos.

a) $b = 20$ cm, $c = 28$ cm, $\hat{C} = 40^\circ$

b) $a = 41$ cm, $b = 9$ cm, $c = 40$ cm

c) $a = 3$ cm, $\hat{B} = 30^\circ$, $c = 5$ cm

d) $a = 12$ cm, $b = 15$ cm, $\hat{C} = 35^\circ$

e) $a = 30$ cm, $\hat{B} = 30^\circ$, $\hat{C} = 50^\circ$

f) $b = 25$ cm, $\hat{B} = 55^\circ$, $\hat{C} = 65^\circ$

a) $\dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{B} = \dfrac{b\operatorname{sen}\hat{C}}{c} = \dfrac{20\cdot\operatorname{sen}40^\circ}{28} = 0{,}459 \Rightarrow \hat{B} = 27^\circ 19'\,21''$

$\hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} = 112^\circ 40'39''$

$\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow a = \dfrac{c\operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{C}} = \dfrac{28\cdot\operatorname{sen}112^\circ 40''39''}{\operatorname{sen}40^\circ} = 40{,}2 \text{ cm}$

b) $\cos\hat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{9^2 + 40^2 - 41^2}{2\cdot 9\cdot 40} = 0 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$

$\cos\hat{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{41^2 + 40^2 - 9^2}{2\cdot 40\cdot 41} = 0{,}9756 \Rightarrow \hat{B} = 12^\circ\ 40'\ 58''$

$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 77^\circ\ 19'\ 2''$

c) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} = 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos 30^\circ = 8{,}0192 \Rightarrow b = 2{,}83 \text{ cm}$

$\cos\hat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{2{,}83^2 + 5^2 - 3^2}{2\cdot 2{,}83\cdot 5} = 0{,}8484 \Rightarrow \hat{A} = 31^\circ\ 57'\ 43''$

$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 118^\circ\ 2'\ 17''$

d) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} = 12^2 + 15^2 - 2\cdot 12\cdot 15\cdot\cos 35^\circ = 74{,}1053 \Rightarrow c = 8{,}61 \text{ cm}$

$\cos\hat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{15^2 + 8{,}61^2 - 12^2}{2\cdot 15\cdot 8{,}61} = 0{,}6006 \Rightarrow \hat{A} = 53^\circ\ 5'\ 14''$

$\hat{B} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{C} = 91^\circ\ 54'\ 46''$

e) $\hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} = 100^\circ$

$\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow c = \dfrac{a\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{30\operatorname{sen}50^\circ}{\operatorname{sen}100^\circ} = 23{,}34 \text{ cm}$

$\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow b = \dfrac{a\operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{30\operatorname{sen}30^\circ}{\operatorname{sen}100^\circ} = 15{,}23 \text{ cm}$

f) $\hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} = 60^\circ$

$\dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow c = \dfrac{b\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{25\operatorname{sen}65^\circ}{\operatorname{sen}55^\circ} = 27{,}66 \text{ cm}$

$\dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} \Rightarrow a = \dfrac{b\operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{25\operatorname{sen}60^\circ}{\operatorname{sen}55^\circ} = 26{,}43 \text{ cm}$

116. Calcula el área de cada uno de estos triángulos.

a) $\hat{A} = 80º$, $b = 25$ cm, $c = 16$ cm

b) $\hat{A} = 70º$, $\hat{B} = 40º$, $c = 20$ cm

c) $a = 16$ cm, $b = 25$ cm, $c = 15$ cm

d) $\hat{A} = 66º$, $a = 15$ cm, $c = 20$ cm

e) $a = 10$ cm, $b = 15$ cm, $\hat{C} = 35º$

a) $A = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} \hat{A} = 196{,}96 \text{ cm}^2$

b) $\hat{C} = 70º$, por tanto, el triángulo es isósceles y $a = 20$ cm

$A = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen} \hat{B} = 128{,}56 \text{ cm}^2$

c) $\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0{,}792 \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{A} = 0{,}6105$

$A = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} \hat{A} = 114{,}47 \text{ cm}^2$

d) $\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c \operatorname{sen} \hat{A}}{a} = 1{,}218 > 1$

No existe tal triángulo

e) $A = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \hat{C} = 43{,}02 \text{ cm}^2$

117. Halla el área de los dos triángulos que verifican que $\hat{A} = 45º$, $a = 6$ cm y $c = 7{,}5$ cm.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c \operatorname{sen} \hat{A}}{a} = 0{,}8839 \Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 62º\ 6'\ 59'',\ \hat{B} = 72º\ 53'\ 1'' \\ \hat{C} = 117º\ 53'\ 1'',\ \hat{B} = 17º\ 6'\ 59'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen} \hat{B} = 21{,}5 \text{ cm}^2 \\ A = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen} \hat{B} = 6{,}62 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

Síntesis

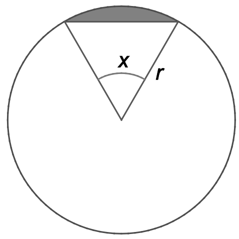
118. Si la suma de dos ángulos α y β es igual, en radianes, a $\frac{\pi}{3}$, calcula el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta}$$

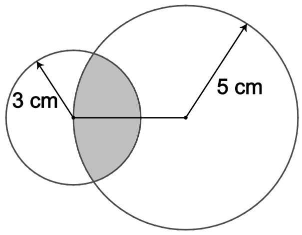
$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta} = \frac{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2}} = \operatorname{cotg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

119. a) Demuestra que el área del segmento circular de la figura se puede calcular mediante la expresión:

$$A = \frac{r^2}{2}(x - \text{sen}\, x)$$



b) Calcula el área de la zona sombreada.



a) Área del sector circular: $A_1 = \frac{\pi r^2 x}{360^\circ}$ Área del triángulo: $A_2 = \frac{1}{2} r^2 \text{sen}\, x$

Área del segmento circular: $A = A_1 - A_2 = \frac{\pi r^2 x}{360^\circ} - \frac{1}{2} r^2 \text{sen}\, x = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi x}{180^\circ} - \text{sen}\, x\right)$

Considerando los ángulos dados en radianes, la expresión queda: $A = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi x}{\pi} - \text{sen}\, x\right) = \frac{r^2}{2}(x - \text{sen}\, x)$

b) Aplicando la expresión anterior para calcular el área de los dos segmentos circulares que se forman en ambas circunferencias.

Área del segmento circular de la circunferencia de radio $r_1 = 5$ cm:

$$\cos \hat{A}_1 = \frac{5^2 + 5^2 - 3^2}{2 \cdot 5 \cdot 5} = 0{,}82 \Rightarrow \hat{A}_1 = 34{,}92^\circ \Rightarrow \alpha_1 = 2\hat{A}_1 = 69{,}84^\circ = 1{,}22 \text{ rad} \Rightarrow \text{A}_1 = \frac{r_1^2}{2}(\alpha_1 - \text{sen}\,\alpha_1) = 3{,}51 \text{ cm}^2$$

Área del segmento circular de la circunferencia de radio $r_2 = 3$ cm:

$$\cos \hat{A}_2 = \frac{3^2 + 5^2 - 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = 0{,}3 \Rightarrow \hat{A}_2 = 72{,}54^\circ \Rightarrow \alpha_2 = 2\hat{A}_2 = 145{,}08^\circ = 2{,}53 \text{ rad} \Rightarrow \text{A}_2 = \frac{r_2^2}{2}(\alpha_2 - \text{sen}\,\alpha_2) = 8{,}8 \text{ cm}^2$$

Por tanto, el área de la zona sombreada es $A = A_1 + A_2 = 12{,}31 \text{ cm}^2$.

120. a) Halla una fórmula que permita calcular el área de un rombo conociendo las medidas de su lado y de uno de sus ángulos.

b) ¿Cuál es el área de un rombo de 15 cm de lado si uno de sus ángulos mide 40°?

c) Calcula los ángulos de un rombo sabiendo que su lado mide 4 cm y su área 8 cm^2.

a) Un rombo de lado *x* y uno de sus ángulos α se puede dividir en dos triángulos isósceles iguales de área

$A = \frac{1}{2} x^2 \text{sen}\,\alpha$, por tanto, el área del rombo es $A_R = 2A = x^2 \text{sen}\,\alpha$.

b) $A_R = 15^2 \text{sen}\, 40^\circ = 144{,}63 \text{ cm}^2$.

c) $8 = 4^2 \text{sen}\,\alpha \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Los ángulos del rombo son 30º y 150º.

121. a) Demuestra que $1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

b) Con ayuda de la fórmula anterior y el teorema del coseno, demuestra que en un triángulo de lados *a*, *b* y c se verifica:

$$\cos\frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

con *p* el valor del semiperímetro del triángulo $p = \frac{a+b+c}{2}$.

a) $1+\cos\alpha = 1+\cos^2\frac{\alpha}{2} - \text{sen}^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

b) $2\cos^2\frac{\hat{A}}{2} = 1+\cos\hat{A} = 1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} = \frac{2p(p-a)}{bc} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

122. Sabiendo que $\text{tg}\frac{\alpha}{2} = t$:

a) Calcula $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ y $\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}$ en función de *t*.

b) Con la ayuda de las fórmulas del ángulo doble, calcula $\text{sen}\,\alpha$, $\cos\alpha$ y $\text{tg}\,\alpha$ en función de *t*.

c) Calcula en función de *t* las siguientes expresiones:

i) $\frac{1}{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha}$ **ii)** $\frac{\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha}$ **iii)** $\frac{\text{tg}\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha}$

a) $1+\text{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \sec^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{1+\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{1+t^2}$ y $\text{sen}^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1-\frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$

b) $\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = 2\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos\alpha = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \text{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2t}{1-t^2}$

c) i) $\frac{1}{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{2t}{t^2+1}+\frac{1-t^2}{t^2+1}} = \frac{t^2+1}{-t^2+2t+1}$

ii) $\frac{\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha} = \frac{\frac{2t}{t^2+1}-\frac{1-t^2}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1}+\frac{1-t^2}{t^2+1}} = \frac{\frac{t^2+2t-1}{t^2+1}}{\frac{-t^2+2t+1}{t^2+1}} = \frac{t^2+2t-1}{-t^2+2t+1}$

iii) $\frac{\text{tg}\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha} = \frac{\frac{2t}{1-t^2}}{\frac{t^2+2t-1}{t^2+1}} = \frac{2t\left(t^2+1\right)}{\left(1-t^2\right)\left(t^2+2t-1\right)}$

CUESTIONES

123.¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de sen α, cos α, tg α, cosec α, sec α y cotg α?

El valor mínimo de sen α y cos α es –1 y el valor máximo es 1.

El valor mínimo y máximo del resto de valores no está definido, tg α y cotg α pueden tomar cualquier valor, sec α y cosec α pueden tomar cualquier valor salvo los pertenecientes al intervalo (–1, 1).

124.Indica el número de soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) $\text{sen } x + \cos x = 3$ **b)** $\cos^n x = 10$ siendo n cualquier número natural.

a) No tiene solución, pues el valor máximo del sen x y del cos x es 1, con lo cual su suma nunca puede ser 3.

b) No tiene solución, pues el valor máximo del cos x es 1, con lo cual su potencia nunca puede ser 10.

125.Indica todos los ángulos positivos y menores que 360º tales que su tangente coincida con su cotangente.

La tangente coincide con la cotangente para aquellos ángulos en que su valor es 1 y –1. Luego, los ángulos positivos menores de 360º que satisfacen dicha condición son 45º, 135º, 225º y 315º.

126.¿Cuánto vale la siguiente diferencia?

$$\mathbf{sen}(5\pi - \alpha) - \mathbf{cos}(\alpha + 8\pi)$$

$$\text{sen}(5\pi - \alpha) - \cos(\alpha + 8\pi) = \text{sen}\,5\pi\cos\alpha - \cos 5\pi\,\text{sen}\,\alpha - \cos\alpha\cos 8\pi + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,8\pi =$$

$$= \text{sen}\,\pi\cos\alpha - \cos\pi\,\text{sen}\,\alpha - \cos\alpha\cos 2\pi + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,2\pi = \text{sen}\,\alpha - \cos\alpha$$

PROBLEMAS

127.Un globo está sujeto a una cuerda de 10 m de longitud. Debido a la acción del viento, el globo se ha desplazado de la vertical del punto de amarre y se encuentra a una altura de 8 m. Calcula la inclinación de la cuerda respecto de la línea de tierra.

Sea α la inclinación buscada, tenemos: $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{8}{10} \Rightarrow \alpha = 53º\ 7'\ 48''$.

128.En cierta ciudad, en el mediodía del solsticio de verano, los rayos solares tienen una inclinación de 73º 3′. Calcula la longitud de la sombra de un edificio de 52 m de altura.

Sea x la longitud de la sombra, tenemos: $\text{tg}\,73º\ 3' = \dfrac{52}{x} \Rightarrow x = 15{,}85$ m.

129.Una señal de tráfico indica que la pendiente de un tramo de carretera es del 8 %, lo que quiere decir que en un desplazamiento horizontal de 100 m se realiza un ascenso de 8 m de altura.

a) ¿Qué ángulo forma la carretera con la horizontal?

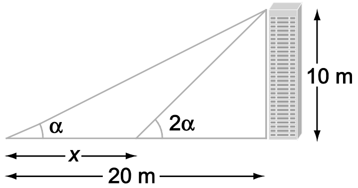
b) ¿Cuántos metros hay que recorrer para ascender 125 m?

a) Sea α el ángulo buscado, tenemos: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{8}{100} \Rightarrow \alpha = 4º\ 34''\ 26''$

b) Sea x el recorrido pedido, tenemos: $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{125}{x} \Rightarrow x = 1567{,}5$ m

130. **Desde un cierto punto que dista 20 m del pie de una torre de 10 m de altura, vemos el punto más alto de ella bajo un cierto ángulo.**

¿Qué distancia debemos recorrer hacia la torre para verlo con un ángulo que sea el doble del anterior?



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{10}{20};\quad \operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} = \frac{10}{20-x} \Rightarrow 4x = 50 \Rightarrow x = 12{,}5 \text{ m}$$

131. **Desde un punto del suelo se ve la copa de un pino bajo un ángulo de 42º. Si nos alejamos 2,5 m hacia otro punto del suelo, alineado con el anterior y con el pie del pino, vemos la copa bajo un ángulo de 24º.**

Calcula la altura del pino.

Sea h la altura del pino y x la distancia del pie del pino al primer punto. Tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tg}42^\circ = \dfrac{h}{x}\\ \operatorname{tg}24^\circ = \dfrac{h}{2{,}5+x}\end{array}\right\} \Rightarrow h = x\operatorname{tg}42^\circ = 0{,}9x \Rightarrow 0{,}445 = \frac{0{,}9x}{2{,}5+x} \Rightarrow 1{,}1125 + 0{,}445x = 0{,}9x \Rightarrow x = 2{,}45 \text{ m} \Rightarrow h = 2{,}2 \text{ m}$$

132. **Dos coches, con velocidades constantes respectivas de 90 y 80 km/h, viajan por una carretera que se bifurca en dos que forman un ángulo de 82º y son rectas. Si llegan a la vez a la bifurcación y cada coche toma una de las ramas, ¿qué distancia habrá entre ellos cuando lleven 15 minutos de viaje?**

Sean e_1 y e_2 los espacios recorridos por los dos coches en 15 min = 0,25 h y sea x la distancia buscada, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}e_1 = 90\cdot 0{,}25 = 22{,}5 \text{ km}\\ e_2 = 80\cdot 0{,}25 = 20 \text{ km}\end{array}\right\} \Rightarrow x = \sqrt{22{,}5^2 + 20^2 - 2\cdot 22{,}5\cdot 20\cos 82^\circ} = 27{,}95 \text{ km}$$

133. **Dos coches parten a la vez de un cruce del que salen dos carreteras: una en dirección norte y otra en dirección nornordeste. Uno de los coches toma la primera de ellas con una velocidad de 70 km/h, y el otro la segunda con una velocidad de 90 km/h, ambas constantes.**

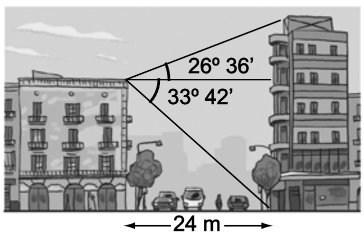
¿A qué distancia se encontrarán al cabo de 30 minutos?

El ángulo que forman las dos carreteras es $\alpha = 22^\circ\ 30'$.

Sean e_1 y e_2 los espacios recorridos por los dos coches en 30 min = 0,5 h y sea x la distancia buscada, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}e_1 = 70\cdot 0{,}5 = 35 \text{ km}\\ e_2 = 90\cdot 0{,}5 = 45 \text{ km}\end{array}\right\} \Rightarrow x = \sqrt{35^2 + 45^2 - 2\cdot 35\cdot 45\cos\alpha} = 18{,}43 \text{ km}$$

134. **Calcula la altura de los dos edificios de la figura.**

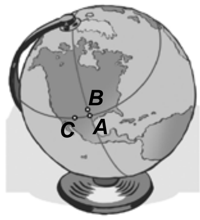


Sea x la altura del primer edificio e y la del segundo. Tenemos:

$$\operatorname{tg}33^\circ 42' = \frac{x}{24} \Rightarrow x = 24\operatorname{tg}33^\circ 42' = 16 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg}26^\circ 36' = \frac{y-x}{24} \Rightarrow y - x = 24\operatorname{tg}26^\circ 36' = 12 \text{ m} \Rightarrow y = 12 + 16 = 28 \text{ m}$$

135. Dos ciudades, *A* y *B*, están situadas sobre el mismo meridiano de la esfera terrestre, mientras que la ciudad *C* se encuentra en el mismo paralelo que *A*. La latitud de *A* es de $\alpha = 40º$ Norte.



a) Si la ciudad *B* está 150 km al norte de *A*, calcula su latitud sabiendo que el radio de la Tierra es de unos 6370 km.

b) Si la ciudad *C* está situada sobre el mismo paralelo, a 30º al oeste de *A*, ¿qué distancia separa estas dos ciudades?

a) Recordemos que la longitud de un arco de amplitud α grados y de una circunferencia de radio *r* es $L = \dfrac{\pi r \alpha}{180º}$:

$$\alpha + \beta = \frac{180º L}{\pi r} = \frac{180º\left[\dfrac{\pi \cdot 40º \cdot 6370}{180º} + 150\right]}{6370\pi} = 41º\ 21'$$

b) Se calcula en primer lugar el radio del paralelo correspondiente: $\text{sen}\,50º = \dfrac{r}{6370} \Rightarrow r = 4879{,}7$ km

$$L = \frac{\pi r \alpha}{180º} = 2555 \text{ km}$$

136. Un avión vuela entre dos ciudades, *A* y *B*, que distan 75 km entre sí. Las visuales desde *A* y *B* hasta el avión forman con la horizontal ángulos de 36º y 12º de amplitud, respectivamente.

Calcula la altura a la que vuela el avión y las distancias a las que se encuentra de *A* y de *B*, suponiendo que el avión y las ciudades están sobre el mismo plano vertical.

Sean x_A, x_B las distancias del avión a *A* y *B*, respectivamente, y *h* la altura del avión, tenemos:

$$\frac{x_B}{\text{sen}\,36º} = \frac{75}{\text{sen}\,132º} \Rightarrow x_B = 59 \text{ km} \qquad \frac{x_A}{\text{sen}\,12º} = \frac{75}{\text{sen}\,132º} \Rightarrow x_A = 21 \text{ km} \qquad h = x_B \cdot \text{sen}\,12º = 12{,}3 \text{ km}$$

137. Calcula el área de un pentágono regular si su perímetro coincide con el de un cuadrado que tiene 144 cm² de área.

El lado del cuadrado mide $\sqrt{144} = 12$ cm, por tanto, el perímetro del pentágono es 48 cm, es decir, cada lado del pentágono mide 9,6 cm. Si a_p es la apotema, tenemos $\text{tg}\,36º = \dfrac{4{,}8}{a_p} \Rightarrow a_p = 6{,}61$ cm y por tanto, el área del pentágono es $\dfrac{48 \cdot 6{,}61}{2} = 158{,}54$ cm^2.

138. Calcula los radios y las áreas de las circunferencias inscrita y circunscrita a un octógono regular de 5 cm de lado.

Calculamos el radio de la circunferencia circunscrita: $\text{sen}\dfrac{360º}{16} = \dfrac{2{,}5}{R} \Rightarrow R = 6{,}53$ cm.

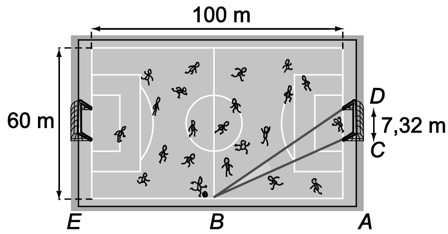
Calculamos el radio de la circunferencia inscrita: $\text{tg}\dfrac{360º}{16} = \dfrac{2{,}5}{r} \Rightarrow r = 6{,}04$ cm.

Por tanto, el área de la circunferencia circunscrita es $A_1 = \pi R^2 = 134 \text{ cm}^2$ y el de la circunferencia inscrita es $A_2 = \pi r^2 = 114 \text{ cm}^2$.

139. Calcula el área del paralelogramo cuyos lados miden 10 y 15 cm, respectivamente, si uno de sus ángulos mide 35º.

El paralelogramo se puede dividir en dos triángulos iguales de área $\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 15\cdot \text{sen}\,35^\circ$, por tanto, el área del paralelogramo es $10\cdot 15\cdot \text{sen}\,35^\circ = 86,04\ \text{cm}^2$.

140. Calcula el ángulo de tiro del jugador que está situado en el punto *B* del campo.



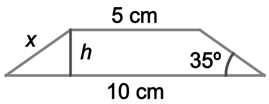
$$\left\{\begin{array}{l} \text{tg}\,\widehat{CBA} = \dfrac{26,34}{50} = 0,5268 \Rightarrow \widehat{CBA} = 27^\circ\ 46'\ 49'' \\ \text{tg}\,\widehat{DBA} = \dfrac{33,66}{50} = 0,6732 \Rightarrow \widehat{DBA} = 33^\circ\ 56'\ 54'' \end{array}\right. \Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{DBA} - \widehat{CBA} = 6^\circ\ 10'\ 5''$$

141. Las bases de un trapecio isósceles miden 10 y 5 cm, respectivamente. El ángulo que forma la base mayor con cada uno de los lados no paralelos es de 35º. Calcula la altura, el perímetro y el área del trapecio.

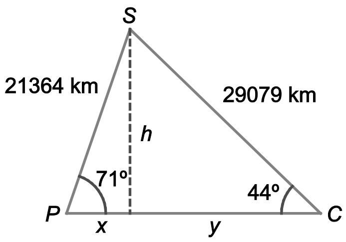
$$\text{tg}\,35^\circ = \frac{h}{2,5} \Rightarrow h = 1,75\ \text{cm}$$

$$\cos 35^\circ = \frac{2,5}{x} \Rightarrow x = 3,05\ \text{cm} \Rightarrow P = 21,1\ \text{cm}$$

$$A = \frac{(10+5)\cdot 1,75}{2} = 13,13\ \text{cm}^2$$



142. Desde un satélite GPS se establece la posición de un coche respecto de un punto de referencia fijo en la Tierra. Las distancias desde el punto fijo y el coche al satélite son 21 364 y 29 079 km, respectivamente. Si la línea que une el punto fijo con el satélite forma un ángulo con el suelo de 71º, y la que une el coche con el satélite, 44º, ¿qué distancia separa al coche del punto fijo? ¿A qué altura está el satélite?

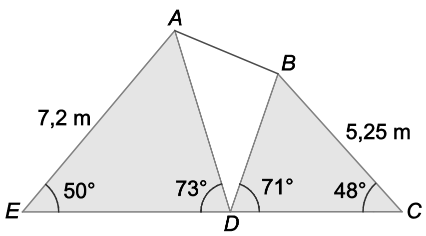


Observemos el dibujo, tenemos:

$$h = 21364\cdot \text{sen}\,71^\circ = 20200\ \text{km}$$

$$x + y = 21364\cdot \cos 71^\circ + 29079\cdot \cos 44^\circ = 27873,12\ \text{km}$$

143. Calcula la distancia entre los puntos *A* y *B*.

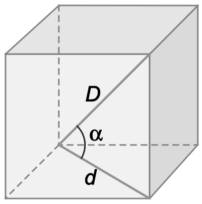


$$\frac{AD}{\text{sen}\,50^\circ} = \frac{7,2}{\text{sen}\,73^\circ} \Rightarrow AD = 5,77\ \text{m}$$

$$\frac{BD}{\text{sen}\,48^\circ} = \frac{5,25}{\text{sen}\,71^\circ} \Rightarrow BD = 4,13\ \text{m}$$

$$AB^2 = 5,77^2 + 4,13^2 - 2,\cdot 5,77\cdot 4,13\cos(180^\circ - 73^\circ - 71^\circ) = 11,79 \Rightarrow AB = 3,43\ \text{m}$$

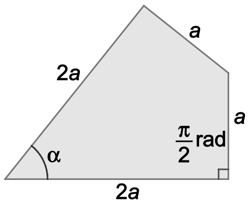
144. Calcula el ángulo α que forman la diagonal del cubo y la diagonal de una cara del mismo.



Sea a la arista del cubo, $D = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$ y $d = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$, por tanto, tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{d}{D} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \alpha = 35^\circ\ 15'\ 52''$$

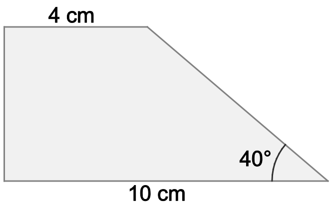
145. Calcula la amplitud del ángulo α de la figura.



La figura se puede dividir en dos triángulos iguales, ya que tienen los tres lados iguales, por tanto:

$$\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 26^\circ\ 33'\ 54'' \Rightarrow \alpha = 53^\circ\ 7'\ 48''$$

146. Calcula la altura, el perímetro y el área del trapecio de la figura.



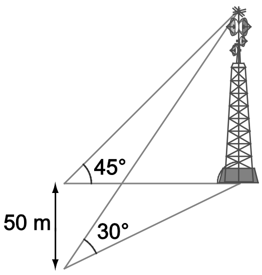
Altura: $h = 6\text{tg } 40^\circ = 5{,}03$ cm

Lado restante: $x = 6\cos 40^\circ = 4{,}6$ cm

Perímetro: 23,63 cm

Área: $\frac{10+4}{2} \cdot 5{,}03 = 35{,}21\ \text{cm}^2$

147. Un hombre que está situado al oeste de una emisora de radio observa que su ángulo de elevación es de 45º. Camina 50 m hacia el sur y observa que el ángulo de elevación es ahora de 30º. Halla la altura de la antena.



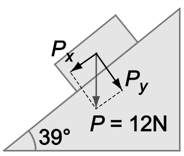
La distancia inicial a la antena es igual a su altura h, ya que el ángulo en el primer punto es de 45º.

Desde el segundo punto, la distancia a la antena es $\frac{h}{\text{tg}\,30^\circ} = \sqrt{3}h$.

Al ser el triángulo del suelo rectángulo tenemos:

$$h^2 + 50^2 = \left(\sqrt{3}h\right)^2 = 3h^2 \Rightarrow h^2 = 1250 \Rightarrow h = 35{,}36 \text{ m}$$

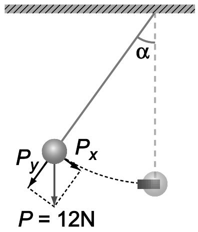
148. Calcula las componentes p_x y p_y de la fuerza $\vec{P}$ de la figura.



$$p_x = P\,\text{sen}\,\alpha = 12\,\text{sen}\,39^\circ = 7{,}55 \text{ N}$$

$$p_y = P\cos\alpha = 12\cos 39^\circ = 9{,}32 \text{ N}$$

149. Calcula, en función de α, las componentes p_x y p_y de la fuerza $\vec{P}$ en el siguiente péndulo. Halla el valor de la fuerza para el caso en que α = 30º.



$p_x = P \operatorname{sen} \alpha = 12 \operatorname{sen} 30º = 6$ N

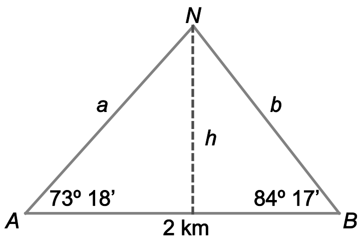
$p_y = P \cos \alpha = 12 \cos 30º = 10,39$ N

150. Dos personas que están separadas por 2 km de distancia, ven, sobre su plano vertical y en el mismo momento, una nube bajo ángulos de 73º 18′ y 84º 17′, respectivamente.

Calcula la altura de la nube y la distancia de la misma a cada uno de los observadores.

Hay dos posibles interpretaciones del problema.

Si la nube está situada entre los dos observadores, tenemos:

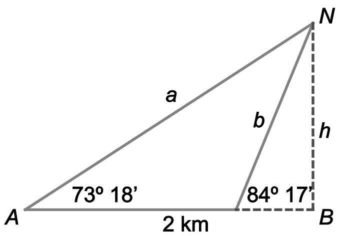


$$\frac{b}{\operatorname{sen} 73º 18'} = \frac{2}{\operatorname{sen} 22º\ 25'} \Rightarrow b = 5,02 \text{ km}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 84º 17'} = \frac{2}{\operatorname{sen} 22º\ 25'} \Rightarrow a = 5,22 \text{ km}$$

$$h = b \operatorname{sen} 84º\ 17' = 5 \text{ km}$$

Si la nube está situada a un mismo lado de los dos observadores, tenemos



$$\frac{b}{\operatorname{sen} 73º\ 18'} = \frac{2}{\operatorname{sen} 10º\ 59'} \Rightarrow b = 10,05 \text{ km}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 95º\ 43'} = \frac{2}{\operatorname{sen} 10º\ 59'} \Rightarrow a = 10,45 \text{ km}$$

$$h = b \operatorname{sen} 84º\ 17' = 10 \text{ km}$$

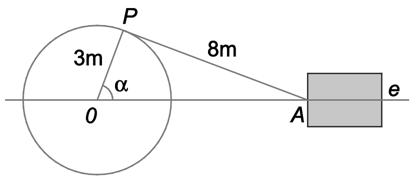
151. Determina, en función del número de lados, las áreas de los polígonos regulares de n lados inscritos y circunscritos, respectivamente, a una circunferencia de 10 cm de radio.

Área del polígono inscrito. $A = n \frac{1}{2} 10^2 \operatorname{sen} \frac{360º}{n} = 50n \operatorname{sen} \frac{360º}{n}$

El lado del polígono circunscrito mide $2 \cdot 10 \cdot \operatorname{tg} \frac{360º}{2n} = 20 \operatorname{tg} \frac{180º}{n}$, por tanto, el área del polígono circunscrito es:

$$A = \frac{n \cdot 20 \operatorname{tg} \frac{180º}{n} \cdot 10}{2} = 100n \operatorname{tg} \frac{180º}{n}$$

152. La máquina que representa la figura transforma un movimiento con trayectoria circular en un movimiento con trayectoria recta.



a) Calcula la distancia que separa a *O* de *A* cuando:

i) $\alpha = 0$ rad **ii)** $\alpha = \pi$ rad **iii)** $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rad

b) Halla una expresión que relacione la distancia *OA* con el ángulo α.

c) Comprueba que la relación hallada se corresponde con los valores calculados en el apartado a).

d) Calcula la distancia *OA* cuando:

i) $\alpha = \frac{\pi}{6}$ rad **ii)** $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ rad **iii)** $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ rad **iv)** $\alpha = \frac{11\pi}{6}$ rad

a) **i)** $\alpha = 0 \Rightarrow OA = 8 + 3 = 11$ m **ii)** $\alpha = \pi \Rightarrow OA = 8 - 3 = 5$ m **iii)** $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow OA = \sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{55} = 7{,}42$ m

b) Aplicando el teorema del coseno tenemos:

$$AP^2 = OA^2 + OP^2 - 2 \cdot OA \cdot OP \cos\alpha \Rightarrow 64 = OA^2 + 9 - 6 \cdot OA \cos\alpha \Rightarrow OA^2 - 6\cos\alpha OA - 55 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OA = \frac{6\cos\alpha \pm \sqrt{36\cos^2\alpha - 4 \cdot 1 \cdot (-55)}}{2} = 3\cos\alpha \pm \sqrt{9\cos^2\alpha + 55}$$

c) $$\alpha = 0 \Rightarrow OA = 3\cos 0 \pm \sqrt{9\cos^2 0 + 55} = 3 \pm \sqrt{9 + 55} = 3 \pm 8 \Rightarrow \begin{cases} OA = 3 - 8 = -5 \text{ Imposible} \\ OA = 3 + 8 = 11 \text{ m} \end{cases}$$

De igual manera, eliminando las soluciones imposibles tenemos:

$$\alpha = \pi \Rightarrow OA = 3\cos\pi + \sqrt{9\cos^2\pi + 55} = -3 + \sqrt{9 + 55} = -3 + 8 = 5 \text{ m}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow OA = 3\cos\frac{\pi}{2} + \sqrt{9\cos^2\frac{\pi}{2} + 55} = 0 + \sqrt{0 + 55} = \sqrt{55} = 7{,}42 \text{ m}$$

d) Como antes, eliminando las soluciones imposibles, tenemos:

i) $$\alpha = \frac{\pi}{6} \Rightarrow OA = 3\cos\frac{\pi}{6} + \sqrt{9\cos^2\frac{\pi}{6} + 55} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{27}{4} + 55} = 10{,}46 \text{ m}$$

ii) $$\alpha = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow OA = 3\cos\frac{5\pi}{6} + \sqrt{9\cos^2\frac{5\pi}{6} + 55} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{27}{4} + 55} = 5{,}26 \text{ m}$$

iii) $$\alpha = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow OA = 3\cos\frac{7\pi}{6} + \sqrt{9\cos^2\frac{7\pi}{6} + 55} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{27}{4} + 55} = 5{,}26 \text{ m}$$

iv) $$\alpha = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow OA = 3\cos\frac{11\pi}{6} + \sqrt{9\cos^2\frac{11\pi}{6} + 55} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{27}{4} + 55} = 10{,}46 \text{ m}$$

153. **a)** Demuestra que en cualquier triángulo *ABC*, rectángulo en *A*, se verifica que: $\operatorname{sen} 2\hat{B} = \operatorname{sen} 2\hat{C}$

b) Demuestra que cualquier triángulo *ABC* que verifique la igualdad anterior es isósceles o rectángulo.

a) $$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow 2\hat{B} = 180^\circ - 2\hat{C} \Rightarrow \operatorname{sen} 2\hat{B} = \operatorname{sen}(180^\circ - 2\hat{C}) = \operatorname{sen} 2\hat{C}$$

b) $$\operatorname{sen} 2\hat{B} = \operatorname{sen} 2\hat{C} \Rightarrow \begin{cases} 2\hat{B} = 2\hat{C} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \Rightarrow \text{ Triángulo isósceles} \\ 2\hat{B} = 180^\circ - 2\hat{C} \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \text{ Triángulo rectángulo} \end{cases}$$

154. Prueba que si los ángulos de un triángulo verifican que $\cos\hat{A}+\cos\hat{B}=\operatorname{sen}\hat{C}$, entonces el triángulo es rectángulo. ¿Cuál es el ángulo recto?

$$\cos\hat{A}+\cos\hat{B}=\operatorname{sen}\hat{C}\Rightarrow 2\cos\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=2\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}\Rightarrow 2\cos\frac{180º-\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=2\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cos\left(90º-\frac{\hat{C}}{2}\right)\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=2\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}\Rightarrow 2\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=2\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}\Rightarrow\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=\cos\frac{\hat{C}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=\dfrac{\hat{C}}{2}\Rightarrow\hat{A}=\hat{B}+\hat{C}=90º\Rightarrow\text{ Triángulo rectángulo en } A\\[2ex]\dfrac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=-\dfrac{\hat{C}}{2}\Rightarrow\hat{B}=\hat{A}+\hat{C}=90º\Rightarrow\text{ Triángulo rectángulo en } B\end{cases}$$

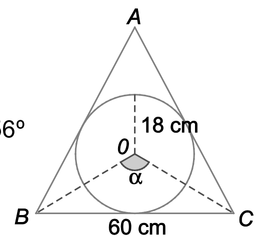
155. Enunciado Si $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ son los tres ángulos de un triángulo cualquiera, calcula el valor de la expresión:

$$\operatorname{cotg}\hat{A}\operatorname{cotg}\hat{B}+\operatorname{cotg}\hat{A}\operatorname{cotg}\hat{C}+\operatorname{cotg}\hat{B}\operatorname{cotg}\hat{C}$$

$$-\operatorname{cotg}\hat{C}=\operatorname{cotg}(180º-\hat{C})=\operatorname{cotg}(\hat{A}+\hat{B})=\frac{1}{\operatorname{tg}(\hat{A}+\hat{B})}=\frac{1-\operatorname{tg}\hat{A}\operatorname{tg}\hat{B}}{\operatorname{tg}\hat{A}+\operatorname{tg}\hat{B}}=\frac{\operatorname{cotg}\hat{A}\operatorname{cotg}\hat{B}-1}{\operatorname{cotg}\hat{A}+\operatorname{cotg}\hat{B}}$$

Por tanto, $\operatorname{cotg}\hat{A}\operatorname{cotg}\hat{B}-1=-\operatorname{cotg}\hat{A}\operatorname{cotg}\hat{C}-\operatorname{cotg}\hat{B}\operatorname{cotg}\hat{C}$ y la expresión vale 1.

156. El radio de la circunferencia inscrita a un triángulo isósceles mide 18 cm. Resuelve el triángulo sabiendo que su base mide 60 cm.



$OB=\sqrt{18^2+30^2}=35$ cm

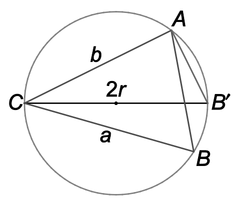
Aplicando el teorema del coseno al triángulo *OBC* tenemos:

$$\cos\alpha=\frac{35^2+35^2-60^2}{2\cdot 35\cdot 35}=-0{,}4694\Rightarrow\alpha=118º\Rightarrow\hat{B}=\hat{C}=2\cdot 31º=62º\Rightarrow\hat{A}=180º-2\cdot 62º=56º$$

$$\frac{AB}{\operatorname{sen}62º}=\frac{60}{\operatorname{sen}56º}\Rightarrow AB=AC=\frac{60\operatorname{sen}62º}{\operatorname{sen}56º}=63{,}9\text{ cm}$$

PARA PROFUNDIZAR

157. Para el triángulo de la figura y la circunferencia circunscrita a él demuestra la afirmación dada en cada caso.



a) Se cumple la relación: $r=\dfrac{a}{2\operatorname{sen}\hat{A}}=\dfrac{b}{2\operatorname{sen}\hat{B}}=\dfrac{c}{2\operatorname{sen}\hat{C}}$ (Ten en cuenta la relación entre los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{B}'$)

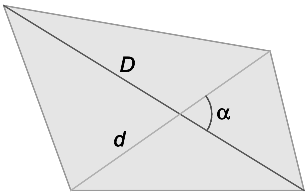
b) El área del triángulo se puede calcular como: $A=\dfrac{abc}{4r}$

a) $\hat{B}=\hat{B}'$, ya que ambos son ángulos inscritos a la misma circunferencia y determinan el mismo arco.

$$\operatorname{sen}\hat{B}=\frac{b\operatorname{sen}\hat{A}}{a}\text{ y }\operatorname{sen}\hat{B}'=\frac{b}{2r}\Rightarrow\frac{b\operatorname{sen}\hat{A}}{a}=\frac{b}{2r}\Rightarrow r=\frac{a}{2\operatorname{sen}\hat{A}}\Rightarrow r=\frac{a}{2\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{b}{2\operatorname{sen}\hat{B}}=\frac{c}{2\operatorname{sen}\hat{C}}$$

b) $A=\dfrac{1}{2}ab\operatorname{sen}\hat{C}=\dfrac{1}{2}ab\dfrac{c}{2r}=\dfrac{abc}{4r}$

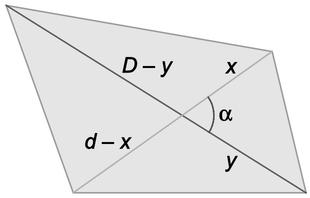
158. Observa la siguiente figura.



a) Si las diagonales de un cuadrilátero miden d y D unidades lineales, respectivamente, y forman un ángulo α, demuestra que el área de dicho cuadrilátero puede calcularse con la fórmula: $A = \frac{1}{2} dD \operatorname{sen} \alpha$

b) Calcula el área de un cuadrilátero cuyas diagonales forman un ángulo de 80º si miden 4 y 5 cm, respectivamente.

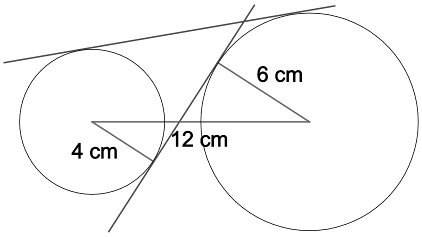
a) El cuadrilátero se puede dividir en cuatro triángulos, como $\operatorname{sen} \alpha (180º - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$ se puede escribir:



$$A = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha \left[xy + x(D-y) + y(d-x) + (D-y)(d-x) \right] = \frac{1}{2} dD \operatorname{sen} \alpha$$

b) $A = \frac{1}{2} Dd \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} 4 \cdot 5 \operatorname{sen} 80º = 9{,}85 \text{ cm}^2$

159. Considera las dos circunferencias coplanarias de la figura.



Calcula la inclinación sobre la recta que une los centros de:

a) la tangente común exterior.

b) la tangente común interior.

a) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{6-4}{12} \Rightarrow \alpha = 9º\ 35'\ 39''$

b) $\operatorname{sen} \beta = \frac{6+4}{12} \Rightarrow \beta = 56º\ 26'\ 34''$