

Dadas las funciones f y g , la **función compuesta** denotada por $f \circ g$, se define como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos x que pertenecen al $domg$, tales que $g(x)$ está en el $domf$.

En cada ejercicio defina las siguientes funciones y determine el dominio de la función compuesta:

(a) $f \circ g$, (b) $g \circ f$, (c) $f \circ f$, (d) $g \circ g$

4. $f(x) = x - 2$, $g(x) = x + 7$

5. $f(x) = x - 5$, $g(x) = x^2 - 1$

6. $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = x^2 - 2$

7. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$

4. $f(x) = x - 2$, $g(x) = x + 7$

5. $f(x) = x - 5$, $g(x) = x^2 - 1$

Solución:

(a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x + 7) - 2 = x + 7 - 2$;

$\therefore (f \circ g)(x) = x + 5$; $dom(f \circ g) = \mathbb{R}$.

(b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x - 2) + 7 = x - 2 + 7$;

$\therefore (g \circ f)(x) = x + 5$; $dom(g \circ f) = \mathbb{R}$.

(c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = (x - 2) - 2 = x - 2 - 2$;

$\therefore (f \circ f)(x) = x - 4$; $dom(f \circ f) = \mathbb{R}$.

(d) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = (x + 7) + 7 = x + 7 + 7$;

$\therefore (g \circ g)(x) = x + 14$; $dom(g \circ g) = \mathbb{R}$.

6. $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = x^2 - 2$

Solución:

Para hallar los dominios de las funciones compuestas, téngase en cuenta que "el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos x que pertenecen al $domg$, tales que $g(x)$ está en el $domf$ ".

(a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{(x^2 - 2) - 2} = \sqrt{x^2 - 4}$.

$domg = (-\infty, \infty)$, $domf = [2, \infty)$: $x^2 - 2 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ ó $x \geq 2$,

$\Rightarrow dom(f \circ g) = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

$\therefore (f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 4}$; $dom(f \circ g) = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.

(b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x-2}^2 - 2 = x - 2 - 2 = x - 4$

$domf = [2, \infty)$, $domg = (-\infty, \infty)$: $\sqrt{x-2} \in (-\infty, \infty) \Leftrightarrow x > 2$,

$\Rightarrow dom(g \circ f) = [2, \infty)$;

$\therefore (g \circ f)(x) = x - 4$; $dom(g \circ f) = [2, \infty)$.

(c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x-2} - 2}$

$domf = [2, \infty)$, $domf = [2, \infty)$: $\sqrt{x-2} \geq 2 \Leftrightarrow x - 2 \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 6$,

$\Rightarrow dom(f \circ f) = [6, \infty)$;

$\therefore (f \circ f)(x) = \sqrt{\sqrt{x-2} - 2}$; $dom(f \circ f) = [6, \infty)$.

(d) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = (x^2 - 2)^2 - 2 = x^4 - 4x^2 + 4 - 2$;

$\therefore (g \circ g)(x) = x^4 - 4x^2 + 2$; $dom(g \circ g) = \mathbb{R}$.

7. $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = \sqrt{x}$

Solución:

Para hallar los dominios de las funciones compuestas, téngase en cuenta que "el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos x que pertenecen al $domg$, tales que $g(x)$ está en el $domf$ ".

(a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

$$domg = [0, \infty), domf = \mathbb{R} - \{0\} : \sqrt{x} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \geq 0,$$

$$\Rightarrow dom(f \circ g) = (0, \infty)$$

$$\therefore (f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 4}; dom(f \circ g) = (-\infty, -2] \cup [2, \infty).$$

(b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\frac{1}{x}}$

$$domf = (-\infty, 0) \cap (0, \infty), domg = [0, \infty) : \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0,$$

$$\Rightarrow dom(g \circ f) = (0, \infty);$$

$$\therefore (g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}; dom(g \circ f) = (0, \infty).$$

(c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$

$$\therefore (f \circ f)(x) = x; dom(f \circ f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

(d) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x},$

$$\therefore (g \circ g)(x) = \sqrt[4]{x}; dom(g \circ g) = [0, \infty).$$