

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO, APLICANDO LA DEFINICIÓN

Halla la derivada de la siguiente función en $x = 1$, aplicando la definición de derivada:

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$\text{Solución: } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 1) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

Calcula, utilizando la definición de derivada, $f'(1)$ para la función $f(x) = \frac{x - 1}{3}$.

$$\text{Solución: } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x - 1}{3} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Halla la derivada de la función $f(x) = (x - 1)^2$ en $x = 2$, aplicando la definición de derivada

$$\text{Solución: } f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)^2 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x = 2$$

Aplicando la definición de derivada, calcula $f'(1)$, siendo $f(x) = \frac{2}{x}$.

$$\text{Solución: } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{x} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2 - 2x}{x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - 2x}{(x - 1)x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(1 - x)}{(x - 1)x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{x} = -2$$

FUNCIÓN DERIVADA, APLICANDO LA DEFINICIÓN

Halla $f'(x)$, aplicando la definición de derivada:

a) $f(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = \frac{x + 1}{3}$

c) $f(x) = 2x^2$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$

e) $f(x) = \frac{2x}{3}$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + 1 - (x^2 + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh + 1 - x^2 - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h + 2x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2x) = 2x \end{aligned}$$

$$\text{b) } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x+h+1}{3} - \frac{x+1}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x+h+1-x-1}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{3h} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 - 2x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x^2 + h^2 + 2xh) - 2x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 2h^2 + 4xh - 2x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + 4xh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2h + 4x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2h + 4x) = 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - x - h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2} \end{aligned}$$

$$\text{e) } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2(x+h)}{3} - \frac{2x}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2x+2h-2x}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2h}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{3h} = \frac{2}{3}$$