Estudia la continuidad de las funciones :

a) $y = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$ **b)** $\dfrac{5x-5}{x^2-1}$

Para que sea continua , basta con que este definida.

a) El cociente esta definido en R excepto las x que anulan el denominador, que en este caso es <u>x = -1</u>

La función será continua en D = ¥ x $\epsilon(-\infty,-1) \cup (-1, \infty)$

En x = - 1 la f (x) es discontinua de segunda especie por ser sus limites laterales $\pm\infty$

b) Aquí el dominio es R excepto las x que hagan $x^2 - 1 = 0$, es decir, $x = \pm 1$

La $y = \dfrac{5x-5}{x^2-1}$ será continua en D : ¥ x $\epsilon(-\infty,-1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

En x = -1 $\lim_{x\to -1} \dfrac{5x-5}{x^2-1} = \dfrac{-10}{0} = -\infty$ discontinua de segunda especie pues no existe $\lim_{x\to -1} f(x)$

En x = 1 $\lim_{x\to 1} \dfrac{5x-5}{x^2-1} = \dfrac{0}{0} = \lim_{x\to 1} \dfrac{5(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)} = \lim_{x\to 1} \dfrac{5}{x+1} = \dfrac{5}{2}$

Discontinua evitable pues existe $\lim_{x\to 1} f(x)$ pero $f(1) = \dfrac{0}{0}$ no esta definida

Estudia razonadamente la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 1 & \text{si } 2 \le x < 4 \\ 5 & \text{si } 4 \le x \end{cases}$$

$$x = 2 \begin{cases} f(2) = 2(2) - 1 = 3 \\ \text{im}_{x\to 2+}(2x-1) = 3 \\ \text{im}_{x\to 2-}(x^2+1) = 5 \end{cases}$$

L1 ≠ L2 ; NO EXISTE $\lim_{x\to 2} f(x)$
f(x) no es continua en x = 2

$$x = 4 \begin{cases} f(4) = 5 \\ \text{im}_{x\to 4+}(5) = 5 \\ \text{im}_{x\to 4-}(2x-1) = 7 \end{cases}$$

L1 ≠ L2 ; NO EXISTE $\lim_{x\to 4} f(x)$
f(x) no es continua en x = 4

En x ε (- ω, 2) $y = x^2 + 1$ es continua por ser una parabola.
En x ε (2, 4) $y = 2x - 1$ es continua por ser una recta.
En x ε (4, ω) $y = 5$ es continua por ser una función <u>constante.</u>

Estudia la derivabilidad de la función

$$\mathbf{f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \qquad \text{en } x = 0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \text{sen } x = 0 \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0 \end{array}\right\} \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0) \quad \Rightarrow \quad \text{continua en } x = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} y'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \cos x = \cos 0 = 1 \\ y'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{No coinciden las derivadas laterales} \\ \text{en } x = 0 \text{ luego la } f(x) \text{ no es derivable en } x = 0 \\ \text{Aunque si sea continua en } x = 0 \end{array}\right.$$

Estudia la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{Si } x = 0 \\ \dfrac{2x \cdot (x-3)}{3x^2 - 9x} & \text{Si } 0 < x < 3 \\ 2/3 & \text{Si } x = 3 \end{cases}$$

Para que una función sea derivable es necesario que primero sea continua.

La función para todo x distinto de 0 y de 3 es continua por ser cociente de dos polinomios que solo se anulan en estos dos valores 0 y 3.

Estudiemos la continuidad en x = 3 calculando los limites laterales y f(3).

$$f(3) = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x \cdot (x-3)}{3x \cdot (x-3)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 3} \frac{2}{3} = \frac{2}{3} = f(3)$$

La función es continua en x = 3. Para ver si es derivable deberemos calcular su derivada y ver si es continua en x = 3

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{(4x-6) \cdot (3x^2 - 9x) - (2x^2 - 6x) . (6x-9)}{(3x^2-9x)^2} = 0 & \text{si } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

$f'(3) = 0$; $\lim_{x\to 3} f'(x) = 0 = f'(3)$ Como la f ´ (x) si es continua en x = 3 esto nos dice que la f (x) si es derivable en x = 3

Estudiemos la continuidad de f (x) en x = 0 , f (0) = - 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x \cdot (x-3)}{3x \cdot (x-3)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \neq f(0)$$

La f(x) no es continua en x = 0, por lo que tampoco será derivable para x = 0.

Estudiar la continuidad de $f(x)$ en toda la recta real:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2x+1} & x \le -1 \\ x^2 + 2 & x > -1 \end{cases}$$

(-∞, -1) $f(x) = \frac{x^2}{2x+1}$ Dominio: $\forall x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2},\ \infty\right) \rightarrow (-\infty, -1) \subset$ D

$\rightarrow f(x)$está definida en $(-\infty, -1) \rightarrow f(x)$es continua en $(-\infty, -1)$

x = - 1 $\begin{cases} f(-1) = \frac{(-1)^2}{2(-2)+1} = -1 \\ \lim\limits_{x \to (-1)^-} \frac{x^2}{2x+1} = -1 \\ \lim\limits_{x \to (-1)^+} x^2 + 2 = -1 \end{cases}$ L1 = L2 = $f(-1) \rightarrow \exists \lim_{x \to (-1)} f(x) = -1 \rightarrow$

$f(x)$ es continua en x = - 1

(-1,∞) $f(x) = x^2 + 2$ Dominio: $\forall x \ni (-\infty, \infty) \rightarrow (-1, \infty)$CD

$\rightarrow f(x)$está definida en $(-1, \infty) \rightarrow f(x)$es continua en $(-1, \infty)$

Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

$$\mathbf{f(x) = \begin{cases} 3x+5 & \text{si } x \leq -1 \\ 2 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x^2 -3x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

$(-\infty,-1)$ f. polinómica de grado 1 ➔ f(x) continua en R

$(-1,1)$ f. constante ➔ f(x) continua en R

$(1, \infty)$ f. polinómica de grado 2 ➔ f(x) continua en R

En x =-1 $\begin{cases} \lim_{x \to -1^+} 2 = 2 \\ \lim_{x \to -1^-} (3x+5) = -3+5 = 2 \end{cases}$ $L_1=L_2$ ➔ existe $\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$ ➔ f(x) es continua en x = - 1

En x = 1 $\begin{cases} \lim_{x \to 1^+} (x^2-3x+1) = 1-3+1 = -1 \\ \lim_{x \to 1^-} 2 = 2 \end{cases}$ $L_1 \neq L_2$ ➔ No existe lim f(x) ➔f(x) no es continua en x = 1

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 2x-3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En los 3 intervalos la f '(x) es continua en R por ser 2 f. continuas y una f. polinómica de grado 1 ➔ f(x) es derivable.

En x = -1 $\begin{cases} \lim_{x \to -1^+} 0 = 0 \\ \lim_{x \to -1^-} 3 = 3 \end{cases}$ $L_1 \neq L_2$ ➔ No existe $\lim_{x \to -1} f'(x)$

f '(x) no es continua ➔ f(x) no es derivable

En x = 1 f(x) no es derivable por no ser continua

Estudiar las discontinuidades si existen de la f(x)

$$\mathbf{F(x)} = \begin{cases} \mathbf{x^2 + 2} & \mathbf{x > 1} \\ \mathbf{3x} & \mathbf{0 \leq x \leq 1} \\ \mathbf{½\, x} & \mathbf{-1 < x < 0} \\ \mathbf{3x} & \mathbf{x = -1} \\ \mathbf{x^2 - 3/2} & \mathbf{x < -1} \end{cases}$$

Los puntos conflictivos son: x= -1, x= 0 y x= 1

$$x = -1 \begin{cases} \lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1+} ½\, x = -1/2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} x^2 - 3/2 = (-1)^2 - 3/2 = -1/2 \qquad l_1 = l_2$$

Los limites laterales coinciden luego como f(-1) = - 3 la discontinuidad es evitable con solo definir el valor -1/2 para x = - 1

$$x = 0 \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 3x = 0 \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} ½\, x = 1/0 = \infty \end{cases}$$

Falta um limite lateral al no exitir luego hay una discontinuidad de 2º espécie com salto infinito único pues f(0)= 0 coincide com el otro limite lateral.

$$x = 1 \begin{cases} \text{Lim}_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 + 2 = 1+2 = 3 \\ \text{Lim}_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 3x = 3 \end{cases}$$

Los limites laterales coinciden y además coinciden con f(1) = 3 luego f(x) es continua en x= 1

Halla a y b para que la función f(x) sea continua y derivable para todo x real.

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{x^2} & \mathbf{si\ \ x \le 1} \\ \mathbf{-x^2 + ax + b} & \mathbf{si\ \ x > 1} \end{cases}$$

$(-\infty, 1)$ $y = x^2$ es continua en R por ser una función polinómica de grado 2 ➔ continua en $(-\infty, 1) \subset R$.

$(1, \infty)$ $y = -x^2 + ax + b$ $\forall\ a, b \in R$, f(x) es continua en R por ser una función polinómica de grado 2 ➔ continua en $(1, \infty) \subset R$.

$$x = 1 \quad \begin{cases} f(1) = 1^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (-x^2 + ax + b) = -1 + a + b \\ \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -1 + a + b = 1 \\ \underline{a + b = 2} \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si}\ \ x \le 1 \\ -2x + a & \text{si}\ \ x > 1 \end{cases}$$

$(-\infty, 1)$ $f'(x) = 2x$ es continua en R por ser una función polinómica de grado 1 ➔ continua en $(-\infty, 1) \subset R$ ➔ f (x) derivable en $(-\infty, 1)$

$(1, \infty)$ $f'(x) = -2x + a$ $\forall\ a \in R$, $f'(x)$ es continua en R por ser una función polinómica de grado 1 ➔ continua en $(1, \infty) \subset R$ ➔ f'(x) derivable en $(1, \infty)$

$$x = 1 \quad \begin{cases} f'(1) = 2 \cdot 1 = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (-2x + a) = -2 + a \\ \lim\limits_{x \to 1^-} (2x) = 2 \end{cases} \quad -2 + a = 2\ ;\ \underline{a = 4}$$

$a + b = 2$; $4 + b = 2$; $\underline{b = -2}$

Hallar los valores de a y b para que la función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si} \quad x < 0 \\ ax + b & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ x^3 - 1 & \text{si} \quad 2 < x \end{cases}$$

$(-\infty, 0)$ $y = x^2 + 3$ es continua en R por ser un polinomio de grado 2 ➔ f(x) es continua en $(-\infty, 0)$

$(0,2)$ $y = ax + b$ es continua en R $\forall$ a ,b ε R por ser un polinomio de grado 1 o de grado 0 ➔f(x) es continua en $(0,2)$

$(2, \infty)$ $y = x^3 - 1$ es continua en R por ser un polinomio de grado 3 ➔ f(x) es continua en $(2, \infty)$

$$x = 0 \begin{cases} f(0) = a \cdot 0 + b = b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (ax + b) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 + 3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_1 = l_2 \qquad \mathbf{b=3} \quad \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3 = f(0) \text{ es continua en } x = 0 \end{cases}$$

$$x = 2 \begin{cases} f(2) = 2a + b \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (x^3 - 1) = 7 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} (ax + b) = 2a + b \end{cases} \qquad \begin{cases} l_1 = l_2 \qquad 7 = 2a + 3;\ 4 = 2a :\ \mathbf{a = 2} \\ \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 7 = f(2) \text{ es continua en } x = 2 \end{cases}$$