Rectas de nivel

7. Para la región representada en el problema anterior, determina sus vértices y halla el valor que toman en cada uno de ellos las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=3x+4y$ b) $g(x,y)=10x-30y+300$ c) $h(x,y)=12x-3y$

Con ayuda de las rectas de nivel asociadas a esas funciones, determina sus valores máximos o mínimos en la región indicada.

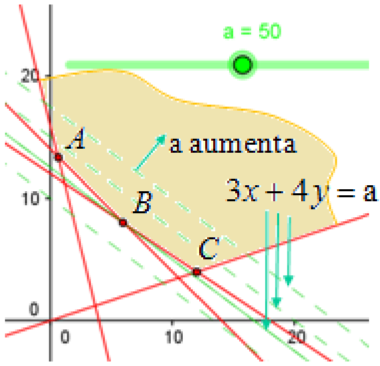
Solución:

Los vértices de la región factible se hallan así:

• Corte de (1) y (3): $\begin{cases} x+y=14 \\ 4x+y=16 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{2}{3},\frac{40}{3}\right)$.

• Corte de (1) y (2): $B(6, 8)$.

• Corte de (2) y (4): $C(12, 4)$.



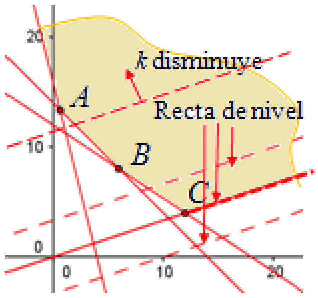
En cada uno de esos puntos las funciones *f*, *g* y *h* toman los valores:

a) $f(A)=\frac{166}{3}$; $f(B)=50$; $f(C)=52$.

Las rectas de nivel asociadas a *f* son $3x+4y=k$. El mínimo nivel para *k* se da en *B*, luego el valor mínimo que toma *f* es 50.

Esta función no tiene máximo para esa región, pues las rectas de nivel pueden ir aumentado su valor indefinidamente.

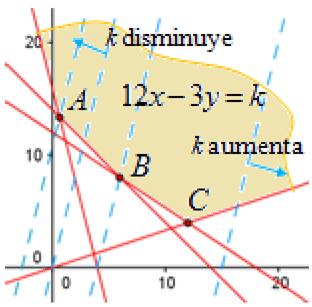
(Utilizando GeoGebra se define el “deslizador 3x+4y=a”. En “Propiedades” se concreta el intervalo de a entre 0 y 100, por ejemplo. Al “deslizar” hacia la derecha, el valor de a aumenta de manera indefinida dentro de la región factible; y deslizando hacia la izquierda, disminuyendo el valor de a, la última recta en contacto con la región factible es la que pasa por el punto *B*).



b) $g(A)=-\frac{280}{3}$; $g(B)=120$; $g(C)=300$.

Las rectas de nivel asociadas a *g* son $10x-30y+300=k$. El máximo nivel para *k* se da en *C*, y en cualquiera de los puntos de la semirrecta $10x-30y+300=300 \Leftrightarrow x-3y=0$ que define la región factible, luego el máximo valor que toma *g* es 300.

Sin embargo, $g(x,y)=10x-30y+300$ no tiene mínimo en esa región, pues las rectas de nivel se pueden desplazar indefinidamente hacia la izquierda disminuyendo su valor.



c) $h(A)=-32$; $h(B)=48$; $h(C)=132$.

Las rectas de nivel de *h* son $12x-3y=k$. Trasladándola a izquierda o derecha siempre tienen puntos en contacto con la región factible, luego *h* no tiene máximo ni mínimo en esa región.

8. Representa gráficamente la región del plano determinada por las restricciones.

$3x+2y\le 48$; $\quad 2x+y\le 30$; $\quad x+2y\le 36$; $\quad x\ge 0$; $\quad y\ge 0$

a) ¿En qué punto de esa región alcanza la función $f(x,y)=6x+5y$ su valor máximo?

b) Traza las rectas de nivel asociadas a *f* y comprueba que la solución algébrica coincide con la gráfica.

Solución:

La recta $3x+2y=48$ (1) pasa por los puntos (0, 24) y (16, 0).

Los puntos que verifican la inecuación $3x+2y\le 48$ son los que están la izquierda de la recta.

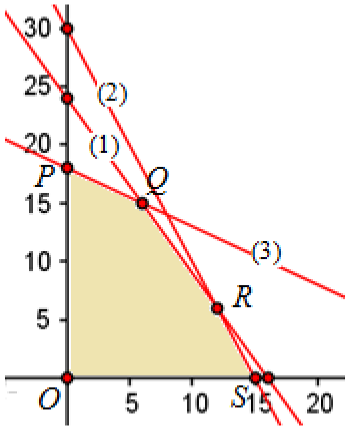
La recta $2x+y=30$ (2) pasa por los puntos (0, 30) y (15, 0).

Los puntos que verifican la inecuación $2x+y\le 30$ son los que están la izquierda de la recta.

La recta $x+2y=36$ (3) pasa por los puntos (0, 18) y (36, 0).

Los puntos que verifican la inecuación $x+2y\le 36$ son los que están la izquierda de la recta.

Las inecuaciones $x\ge 0$ e $y\ge 0$ determinan los puntos del primer cuadrante.



Los vértices de la región factible son:

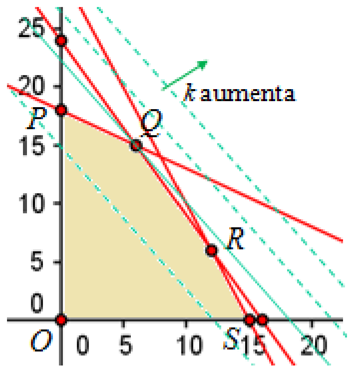
$O(0,0)$; $P(0,18)$; Q: $\begin{cases}3x+2y=48\\ x+2y=36\end{cases}\Rightarrow Q(6,15)$; R: $\begin{cases}3x+2y=48\\ 2x+y=30\end{cases}\Rightarrow R(12,6)$; $S(15,0)$

a) El valor de la función $f(x,y)=6x+5y$ en esos vértices es:

En *O*, *f*(0, 0) = 0; en *P*, *f*(0, 18) = 90; en *Q*, *f*(6, 15) = 111; en *R*, *f*(12, 6) = 102; en *S*, *f*(15, 0) = 90.

El máximo de $f(x,y)=6x+5y$ se da en el punto *Q* y vale 111.

b) Las rectas de nivel son $6x+5y=k$. Al trasladarla a la derecha si nivel aumenta. El punto de la región factible por el que pasa la recta de mayor nivel es *Q*. Es la recta de ecuación $6x+5y=111$.



9. a) Representa gráficamente la región del plano definida por las inecuaciones:

$x\ge 2$, $\quad x+y\ge 6$, $\quad x+y\le 12$, $x-5y\le 0$,

b) Halla los valores máximos y mínimos de las funciones $f(x,y)=2x+3y$, $g(x,y)=x+y$ y $h(x,y)=x+3y$ en dicha región y los puntos en los que se alcanzan.

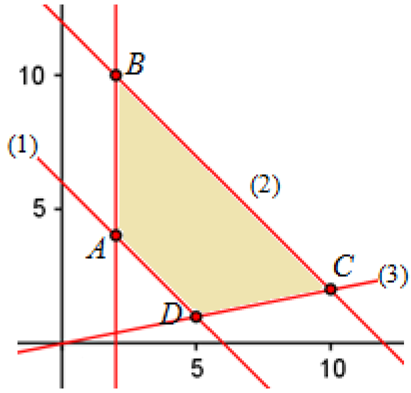
c) Traza las rectas de nivel asociadas a *h* y comprueba que la solución algébrica coincide con la gráfica.

Solución:

a) En todos los casos el conjunto de soluciones de cada inecuación está formado por un semiplano.

- $x\ge 2\rightarrow$ Son los puntos situados a la derecha de la recta *x* = 2.
- $x+y\ge 6\rightarrow$ Son los puntos situados a la derecha de la recta $x+y=6$ (1)
- $x+y\le 12\rightarrow$ Son los puntos situados a la izquierda de la recta $x+y=12$ (2)
- $-x+15y\ge 10\rightarrow$ Son los puntos situados por encima de la recta $-x+15y=10$ (3)

Estas inecuaciones generan la región (cerrada) sombreada en la figura adjunta. Son los puntos interiores o de los lados del cuadrilátero de vértices:



A: $\begin{cases} x=2 \\ x+y=6 \end{cases} \Rightarrow A(2, 4)$; B: $\begin{cases} x=2 \\ x+y=12 \end{cases} \Rightarrow B(2, 10)$;

C: $\begin{cases} x+y=12 \\ -x+5y=0 \end{cases} \Rightarrow C(10, 2)$; D: $\begin{cases} x+y=6 \\ x-5y=0 \end{cases} \Rightarrow D(5, 1)$.

b) Los valores máximo y mínimo de una función lineal en una región cerrada del plano se encuentran en los bordes de la región, en los vértices o en los lados. Para determinarlos basta con evaluar la función objetivo en cada uno de los vértices.

Para la función $f(x, y) = 2x+3y$ se tiene:

$f(2,\ 4)=16$; $f(2,\ 10)=34$; $f(10,\ 2)=26$; $f(5,\ 1)=13$.

El máximo vale 34; se obtiene en el punto A(2, 4).
El mínimo vale 13, y se obtiene en D(5, 1).

Para la función $g(x, y) = x+y$ se tiene:

$g(2,\ 4)=6$; $g(2,\ 10)=12$; $g(10,\ 2)=12$; $g(5,\ 1)=6$.

El máximo vale 12. Se obtiene en los vértices B y C; en consecuencia, también son válidos cualquiera de los puntos del segmento de extremos B y C
El mínimo vale 6 y se obtiene en cualquier punto del segmento AD.

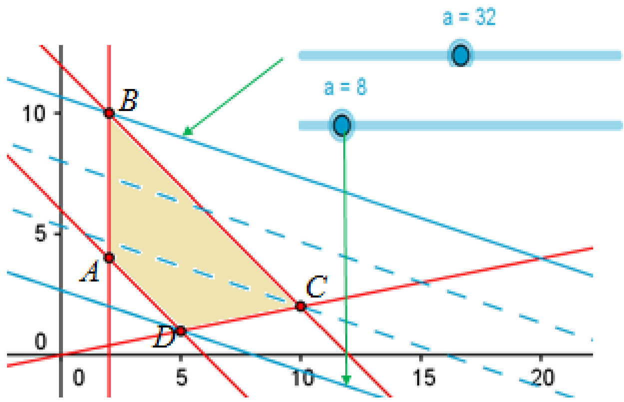
Para la función $h(x, y) = x+3y$ se tiene:

$h(2,\ 4)=14$; $h(2,\ 10)=32$;

$h(10,\ 2)=16$; $h(5,\ 1)=8$.

El máximo vale 32; se obtiene en el punto B(2, 10).
El mínimo vale 8; se obtiene en el punto D(5, 1).

c) Las rectas de nivel son $x+3y=k$ (Si se recurre a GeoGebra, x + 3y = a permite crear un deslizador, tal y como se muestra en la figura). El nivel aumenta si se desliza a la derecha, siendo el punto B el último punto de contacto con la región factible; el nivel disminuye si se desliza a la izquierda, y puede hacerse en contacto con la región factible hasta el punto D.



10. Representa gráficamente la región de soluciones determinada por las restricciones:

$2x+5y\geq 100$; $\quad 4x+y\geq 60$; $\quad 3x+4y\geq 120$

a) ¿Puede determinarse algebraicamente el mínimo de $f(x,y)=5x+y$ en esa región? ¿Y su máximo? Justifica la respuesta.

b) ¿Tiene la función $g(x,y)=5x+4y$ algún óptimo en esa región?

<u>Solución</u>:

La región de soluciones es abierta: la sombreada en la figura adjunta.

La restricción $2x+5y\geq 100$ está asociada a la recta (1): puntos de la derecha.

La restricción $4x+y\geq 60$ está asociada a la recta (2): puntos de la derecha.

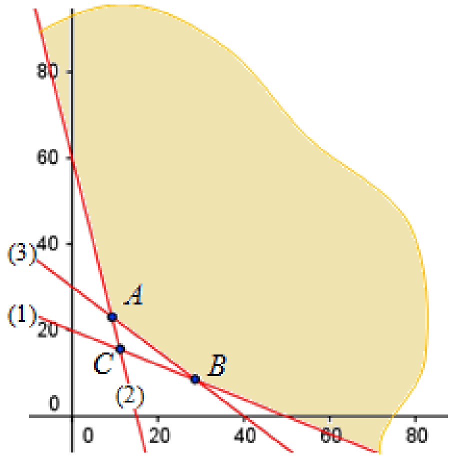
La restricción $3x+4y\geq 120$ está asociada a la recta (3): puntos de la derecha.

Los vértices son:

$$A:\ \begin{cases} 4x+y=60 \\ 3x+4y=120 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{120}{13},\frac{300}{13}\right);$$

$$B:\ \begin{cases} 2x+5y=100 \\ 3x+4y=120 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{200}{7},\frac{60}{7}\right);$$

El punto $C\left(\frac{100}{9},\frac{140}{9}\right)$ no es de la región factible.



a) El valor de $f(x,y)=5x+y$ en los puntos A y B es:

$$f\left(\frac{120}{13},\frac{300}{13}\right)=\frac{900}{13}\approx 69,23;\ f(B)=\frac{1060}{7}\approx 151,43$$

No Puede saberse el mínimo ni el máximo con estos valores: Por ejemplo:

$\rightarrow$ en el punto (0, 60), que es de la región factible, la función vale $f(0,60)=60<f(A)$,

$\rightarrow$ en el punto (60, 60), que también es de la región factible, $f(60,60)=360>f(B)$.

Para regiones abiertas hay que representar las rectas de nivel. En este caso, las rectas de nivel $5x+y=k$ pueden trasladarse, en contacto con la región factible tanto a izquierda como a derecha de manera indefinida.

b) Las rectas de nivel asociadas a $g(x,y)=5x+4y$ son $5x+4y=k$. El valor mínimo para k se da en A: k = 138,46.