

Unidad 4. Polinomios

SOLUCIONES PÁG. 77

1 ¿Cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son polinomios?

a. $\frac{2x^3 - 5x}{4}$

$$\frac{2x^3 - 5x}{4} = \frac{2}{4}x^3 - \frac{5}{4}x = \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{4}x$$

Sí es un polinomio ya que es una expresión algebraica formada por la suma o resta de dos o más monomios no semejantes.

b. $\frac{1}{5}x^4 - \frac{6}{5}x^2 + 3$

Sí es un polinomio ya que es una expresión algebraica formada por la suma o resta de dos o más monomios no semejantes.

c. $\frac{2}{4x^2 + x - 1}$

No es un polinomio, ya que un polinomio es una expresión algebraica formada por la suma o resta de dos o más monomios no semejantes.

d. $x^2 - 3 + 4x - 5x^2 + 6x$

Sí es un polinomio ya que es una expresión algebraica formada por la suma o resta de dos o más monomios no semejantes.

2 Dado el polinomio $P(x) = -3x^4 + 5x - 4x^4 - 1 + 6x - 2x$:

a. Redúcelo y escríbelo como un polinomio ordenado.

$$\begin{aligned} P(x) &= -3x^4 + 5x - 4x^4 - 1 + 6x - 2x = -3x^4 - 4x^4 + 6x + 5x - 2x - 1 = \\ &= -7x^4 + 9x - 1 \end{aligned}$$

b. Determina su grado.

El término que nos determina el grado del polinomio es: $-7x^4$, y es de grado 4.

c. Indica cuántos términos tiene. ¿Cuál es el término independiente?

Tiene tres términos (es el número de monomios que componen el polinomio: $-7x^4$; $9x$ y -1); el término independiente es: -1 .

d. Señala si se trata de un polinomio completo. En caso contrario, ¿qué términos le faltan?

Es un polinomio incompleto ya que le faltan los siguientes términos: x^3 y x^2 .

3. Reduce estos polinomios e indica el grado, el número de términos, las variables, el coeficiente principal y el término independiente.

a. $A(x) = -4x^5 + 2x - 5x^4 - 7 + 3x^5 - 6x^4 + 3x$

$$A(x) = -4x^5 + 3x^5 - 5x^4 - 6x^4 + 2x + 3x - 7 = -x^5 - 11x^4 + 5x - 7$$

El término de mayor grado es: $-x^5$, por lo que es de grado 5.

El número de términos (es el número de monomios que componen el polinomio) es 4: $-x^5$; $-11x^4$; $5x$; -7 .

El coeficiente principal (es el número del monomio de mayor grado) es: -1 .

El término independiente es: -7 (es el término que no tiene parte literal).

b. $B(y) = 8 - 5y + y^2 + 3 - 4y - y^2 + 6y - 2$

$$B(y) = y^2 - y^2 - 4y - 5y + 6y - 2 + 8 + 3 = -3y + 9$$

El término de mayor grado es: $-3y$, por lo que es de grado 1.

El número de términos (es el número de monomios que componen el polinomio) es 2: $-3y$ y $+9$.

El coeficiente principal (es el número del monomio de mayor grado) es: -3 .

El término independiente es: $+9$ (es el término que no tiene parte literal).

c. $C(x, y) = 2x^2y^2 + 9xy^2 - 5y^2x + 3x^2y^2 - 3xy^2$

$$C(x, y) = 2x^2y^2 + 3x^2y^2 - 5y^2x - 3xy^2 + 9xy^2 = 5x^2y^2 - 5xy^2 + 6xy^2 = 5x^2y^2 + xy^2$$

El término de mayor grado es: $5x^2y^2$, por lo que es de grado 4.

El número de términos (es el número de monomios que componen el polinomio) es 2: $5x^2y^2$ y xy^2 .

El coeficiente principal (es el número del monomio de mayor grado) es: 5.

El término independiente es: 0 (es el término que no tiene parte literal).

4. Halla el valor numérico del polinomio $P(x) = 4x^3 - 3x^2 + x - 2$ para los valores:

a. $x = 5$

$$P(5) = 4 \cdot 5^3 - 3 \cdot 5^2 + 5 - 2 = 4 \cdot 125 - 3 \cdot 25 + 3 = 500 - 72 = 428$$

b. $x = -3$

$$P(-3) = 4 \cdot (-3)^3 - 3 \cdot (-3)^2 + (-3) - 2 = 4 \cdot (-27) - 3 \cdot 9 - 5 = -108 - 27 - 5 = -140$$

c. $x = 0$

$$P(0) = 4 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 0 - 2 = -2$$

d. $x = \frac{2}{3}$

$$P\left(\frac{2}{3}\right) = 4\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right) - 2 = \frac{4 \cdot 8}{27} - \frac{3 \cdot 4}{9} - \frac{4}{3} = \frac{32 - 36 - 36}{27} = -\frac{40}{27}$$

- 5 Calcula el valor numérico de los polinomios propuestos para $a = 2$ y $b = -3$.

a. $A(a, b) = a^2 + 4ab - b$

$$A(2, -3) = 2^2 + 4 \cdot 2 \cdot (-3) - (-3) = 4 - 24 + 3 = -17$$

b. $B(a, b) = -5a^2b + a^3b^2 + 6b^2$

$$B(2, -3) = -5 \cdot 2^2 \cdot (-3) + 2^3 \cdot (-3)^2 + 6 \cdot (-3)^2 = 60 + 72 + 54 = 186$$

c. $C(a, b) = \frac{1}{2}a^3b - \frac{2}{9}b^3 + 3a - \frac{5}{3}b^2$

$$C(2, -3) = \frac{1}{2} \cdot 2^3 \cdot (-3) - \frac{2}{9} \cdot (-3)^3 + 3 \cdot 2 - \frac{5}{3} \cdot (-3)^2 = -12 + 6 + 6 - 15 = -15$$

- 6 Determina si alguno de los siguientes valores de x es raíz del polinomio $A(x) = 2x^3 + 9x^2 - 11x - 30$:

a. $x = 2$

$$A(2) = 2 \cdot 2^3 + 9 \cdot 2^2 - 11 \cdot 2 - 30 = 0, \text{ por lo que sí es raíz del polinomio } A(x).$$

b. $x = -1$

$$A(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 9 \cdot (-1)^2 - 11 \cdot (-1) - 30 = -12 \neq 0, \text{ por lo que no es raíz del polinomio } A(x).$$

c. $x = -5$

$$A(-5) = 2 \cdot (-5)^3 + 9 \cdot (-5)^2 - 11 \cdot (-5) - 30 = 0, \text{ por lo que sí es raíz del polinomio } A(x).$$

d. $x = -\frac{3}{2}$

$$A\left(-\frac{3}{2}\right) = 2\left(-\frac{3}{2}\right)^3 + 9\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 11\left(-\frac{3}{2}\right) - 30 = 0, \text{ por lo que sí es raíz del polinomio } A(x).$$

- 7 Determina el valor que tiene m para que el polinomio $P(x) = -x^3 + mx^2 - 4x + 2$ cumpla que $P(-1) = 8$.

$$P(x) = -x^3 + mx^2 - 4x + 2$$

$$8 = -(-1)^3 + m \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 2 \Rightarrow 8 = 1 + m + 4 + 2 \Rightarrow m = 1$$

- 8 En grupos, hallad el valor numérico del polinomio $P(x) = x^2 + x + 41$ para los números enteros 0, 1, 2, ..., 39. ¿Qué tienen en común todos los números obtenidos?

$$P(0) = 0^2 + 0 + 41 = 41$$

$$P(1) = 1^2 + 1 + 41 = 43$$

$$P(2) = 2^2 + 2 + 41 = 47$$

$$P(3) = 3^2 + 3 + 41 = 53$$

$$P(39) = 39^2 + 39 + 41 = 1\,601$$

Los números obtenidos son 41, 43, 47, 53, ..., 1 601. Todos tienen en común que son números primos.

SOLUCIONES PÁG. 79

9 Dados los polinomios: $A(x) = 3x^2 + 9x - 4$ y $B(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3x - 6$

a. Calcula $A(x) + B(x)$ y $B(x) + A(x)$.

$$\begin{array}{r} A(x) = + 3x^2 + 9x - 4 \\ + B(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3x - 6 \\ \hline A(x) + B(x) = -2x^3 + 8x^2 + 6x - 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} B(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3x - 6 \\ + A(x) = + 3x^2 + 9x - 4 \\ \hline B(x) + A(x) = -2x^3 + 8x^2 + 6x - 10 \end{array}$$

b. Calcula $A(x) - B(x)$ y $B(x) - A(x)$.

$A(x) - B(x)$ es:

$$\begin{array}{r} A(x) = + 3x^2 + 9x - 4 \\ + -B(x) = +2x^3 - 5x^2 + 3x + 6 \\ \hline A(x) - B(x) = +2x^3 - 2x^2 + 12x + 2 \end{array}$$

$B(x) - A(x)$ es:

$$\begin{array}{r} B(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3x - 6 \\ + -A(x) = -3x^2 - 9x + 4 \\ \hline B(x) - A(x) = -2x^3 + 2x^2 - 12x - 2 \end{array}$$

c. ¿Se obtiene el mismo resultado en las dos sumas del apartado a.?

Sí, porque la suma cumple la propiedad conmutativa.

d. Indica el grado de los polinomios $A(x)$, $B(x)$, $A(x) + B(x)$ y $A(x) - B(x)$.

El grado de $A(x)$ es 2 ($3x^2$).

El grado de $B(x)$ es 3 ($-2x^3$).

El grado de $A(x) + B(x)$ es 3 ($-2x^3$).

El grado de $A(x) - B(x)$ es 3 ($2x^3$).

10 Realiza las siguientes sumas y restas de polinomios:

a. $(3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 4) + (-x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 6x - 1)$

$$\begin{array}{r} 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 4 \\ + -x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 6x - 1 \\ \hline 2x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 5x + 3 \end{array}$$

b. $(-6x^8 + 5x^6 - 3x^4 - x^2 + 2) - (2x^7 + 5x^4 - x^2 + 2)$

$$\begin{array}{r} -6x^8 - 3x^4 - x^2 + 2 \\ + -2x^7 - 5x^4 + x^2 - 2 \\ \hline -6x^8 - 2x^7 + 5x^6 - 8x^4 \end{array}$$

c. $(11x^3 - 2x^2 + 4x - 5) + (-7x^3 + 2x^2 - 4x - 9)$

$$\begin{array}{r} 11x^3 - 2x^2 + 4x - 5 \\ + -7x^3 + 2x^2 - 4x - 9 \\ \hline 4x^3 - 14 \end{array}$$

d. $(-x^5 + 3x^4 - x - 3) - (-2x^4 + 4x^2 - 5x + 1)$

$$\begin{array}{r} -x^5 + 3x^4 \quad \quad -x - 3 \\ + \quad \quad +2x^4 - 4x^2 + 5x - 1 \\ \hline -x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4x - 4 \end{array}$$

11 Calcula las expresiones a partir de estos polinomios:

$P(x) = 6x^5 - 3x^3 - x^2 + 3x + 1$

$Q(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - x$

$R(x) = -x^6 + 3x^4 - 2x^2 + 3x - 7$

a. $P(x) + Q(x) + R(x)$

$$\begin{array}{r} P(x) = \quad \quad \quad + 6x^5 \quad \quad - 3x^3 - x^2 + 3x + 1 \\ + Q(x) = \quad \quad \quad + 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - x \\ + R(x) = \quad \quad -x^6 \quad \quad + 3x^4 \quad \quad - 2x^2 + 3x - 7 \\ \hline P(x) + Q(x) + R(x) = -x^6 + 6x^5 + 5x^4 - 6x^3 - 8x^2 + 5x - 6 \end{array}$$

b. $P(x) - Q(x) + R(x)$

$$\begin{array}{r} P(x) = \quad \quad \quad + 6x^5 \quad \quad - 3x^3 - x^2 + 3x + 1 \\ + -Q(x) = \quad \quad \quad - 2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + x \\ + R(x) = \quad \quad -x^6 \quad \quad + 3x^4 \quad \quad - 2x^2 + 3x - 7 \\ \hline P(x) - Q(x) + R(x) = -x^6 + 6x^5 + x^4 \quad \quad + 2x^2 + 7x - 6 \end{array}$$

c. $P(x) - Q(x) - R(x)$

$$\begin{array}{r} P(x) = \quad \quad \quad + 6x^5 \quad \quad - 3x^3 - x^2 + 3x + 1 \\ + -Q(x) = \quad \quad \quad - 2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + x \\ + -R(x) = \quad \quad +x^6 \quad \quad - 3x^4 \quad \quad + 2x^2 - 3x + 7 \\ \hline P(x) - Q(x) - R(x) = x^6 + 6x^5 - 5x^4 \quad \quad + 6x^2 + x + 8 \end{array}$$

d. $-P(x) - Q(x) + R(x)$

$$\begin{array}{r} -P(x) = \quad \quad \quad - 6x^5 \quad \quad + 3x^3 + x^2 - 3x - 1 \\ + -Q(x) = \quad \quad \quad - 2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + x \\ + R(x) = \quad \quad -x^6 \quad \quad + 3x^4 \quad \quad - 2x^2 + 3x - 7 \\ \hline -P(x) - Q(x) + R(x) = -x^6 - 6x^5 + x^4 + 6x^3 + 4x^2 + x - 8 \end{array}$$

e. $[P(x) + Q(x)] - R(x)$

$$[P(x) + Q(x)] - R(x) = P(x) + Q(x) - R(x)$$

$$\begin{array}{r} P(x) = 6x^5 3x^3 - x^2 + 3x + 1 \\ + Q(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - x \\ + -R(x) = x^6 - 3x^4 + 2x^2 - 3x + 7 \\ \hline \end{array}$$

$$P(x) + Q(x) - R(x) = x^6 + 6x^5 - x^4 - 6x^3 - 4x^2 - x + 8$$

f. $P(x) - [Q(x) - R(x)]$

$$P(x) - [Q(x) - R(x)] = P(x) - Q(x) + R(x)$$

Igual que en el apartado b.

$$P(x) - Q(x) + R(x) = -x^6 + 6x^5 + x^4 + 2x^2 + 7x - 6$$

12 Realiza las siguientes sumas y restas de polinomios:**a. $(4x^2y - 2x^3y^2 + 2x - xy - 1) + (5x^3y^2 - 3x + 5x^2y - xy)$**

$$\begin{array}{r} -2x^3y^2 + 4x^2y + 2x - xy - 1 \\ + 5x^3y^2 + 5x^2y - 3x - xy \\ \hline \end{array}$$

$$3x^3y^2 + 9x^2y - x - 2xy - 1$$

b. $(-3a^3b^2 + 2a^2b^3 + a^4b - b^2) - (a^4b + a^3b^2 - 4a^2b^3 + 3a^2)$

$$\begin{array}{r} -3a^3b^2 + 2a^2b^3 + a^4b - b^2 \\ + -a^3b^2 + 4a^2b^3 - a^4b - 3a^2 \\ \hline \end{array}$$

$$-4a^3b^2 + 6a^2b^3 - b^2 - 3a^2$$

c. $\left(\frac{3}{5}xy^3 + 4x^3y - \frac{1}{2}x^3 + 2y^3\right) - \left(x^3 + \frac{3}{4}xy^3 - x^3y + 7y^3\right)$

$$\begin{array}{r} \frac{3}{5}xy^3 + 4x^3y - \frac{1}{2}x^3 + 2y^3 \\ + -\frac{3}{4}xy^3 + x^3y - x^3 - 7y^3 \\ \hline \end{array}$$

$$-\frac{3}{20}xy^3 + 5x^3y - \frac{3}{2}x^3 - 5y^3$$

13 Realiza las siguientes operaciones:**a. $\left(x^4 + \frac{5}{2}x^3 - 2x^2 - 3x\right) + \left(5x^4 - \frac{3}{2}x^3 + x^2 - 3x\right)$**

$$\begin{array}{r} x^4 + \frac{5}{2}x^3 - 2x^2 - 3x \\ + 5x^4 - \frac{3}{2}x^3 + x^2 - 3x \\ \hline \end{array}$$

$$6x^4 + x^3 - x^2 - 6x$$

$$\text{b. } \left(2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{3}x + 4 \right) + \left(\frac{2}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 1 \right)$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{3}x + 4 \\ + \frac{2}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 1 \\ \hline \frac{12}{5}x^3 + 2x^2 - x + 3 \end{array}$$

$$\text{c. } \left(-\frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x + 2 \right) - \left(\frac{2}{3}x^5 + \frac{7}{6}x^3 - \frac{8}{5} \right)$$

$$\begin{array}{r} -\frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x + 2 \\ + -\frac{2}{3}x^5 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{8}{5} \\ \hline -\frac{11}{12}x^5 - \frac{5}{6}x^3 - \frac{1}{5}x + \frac{18}{5} \end{array}$$

$$\text{d. } \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{12} - \frac{4x}{2} \right) - \left(\frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{6} - \frac{3x}{8} - \frac{5}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{12} - \frac{4x}{2} - \frac{4x^3}{3} - \frac{x^2}{6} + \frac{3x}{8} + \frac{5}{2} &= \frac{2x^3}{3} - \frac{4x^3}{3} - \frac{5x^2}{12} - \frac{x^2}{6} - \frac{4x}{2} + \frac{3x}{8} + \frac{5}{2} = \\ &= -\frac{2x^3}{3} - \frac{7x^2}{12} - \frac{13x}{8} + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

14 Efectúa esta operación y reduce el resultado al máximo:

$$\begin{aligned} &(-4x^3 + 5x + 3) - (2x^3 - 2x^2 - 1) + (-x^3 + 4x^2 - 6x - 5) - \\ &-(x^2 + 4x + 7) + (-2x - 8) - (5x^2 - 2) \\ &-4x^3 + 5x + 3 - 2x^3 + 2x^2 + 1 - x^3 + 4x^2 - 6x - 5 - x^2 - 4x - 7 - 2x - 8 - 5x^2 + 2 = \\ &= -4x^3 - 2x^3 - x^3 + 2x^2 + 4x^2 - x^2 - 5x^2 + 5x - 6x - 4x - 2x + 3 + 1 - 5 - 7 - 8 + 2 = \\ &= -7x^3 - 7x - 14 \end{aligned}$$

15 Copia en tu cuaderno y sustituye las letras por monomios para que las igualdades se cumplan:

$$\text{a. } (-3x^3 + A - 2x + 6) + (2x^3 + 3x^2 + B - 7) = -x^3 + 5x^2 - x - 1$$

$$A + 3x^2 = 5x^2 \Rightarrow A = 5x^2 - 3x^2 \Rightarrow A = 2x^2$$

$$-2x + B = -x \Rightarrow B = x$$

$$\text{b. } (A + 8x^4 - 2x^3 - B + 4) + (x^6 + C - 5x^3 - 3x^2) = 2x^6 - 5x^5 + D - 7x^3 - 7x^2 + 4$$

$$A + x^6 = 2x^6 \Rightarrow A = 2x^6 - x^6 \Rightarrow A = x^6$$

$$-B - 3x^2 = -7x^2 \Rightarrow B = 4x^2$$

$$C = -5x^5$$

$$D = 8x^4$$

$$\text{c. } (5x^2y^3 + 3xy^4 + A - 5x^2) - (-x^2 + B + 2x^2y - C) = 2x^2y^3 - D - 5x^2y - 2xy^4$$

$$5x^2y^3 + 3xy^4 + A - 5x^2$$

$$\frac{-B + C - 2x^2y + x^2}{2x^2y^3 - 2xy^4 - 5x^2y - D}$$

$$A = -3x^2y$$

$$B = 3x^2y^3$$

$$C = -5xy^4$$

$$D = 4x^2$$

16 Dados los polinomios:

$$A(x) = 3x^2 - 5x + 2$$

$$B(x) = x^3 - 4x^2 - x$$

$$C(x) = 6x^3 + x^2 - 3$$

Comprueba que se cumple la propiedad asociativa para la suma de polinomios:

$$A(x) + [B(x) + C(x)] = [A(x) + B(x)] + C(x)$$

$$B(x) = x^3 - 4x^2 - x$$

$$+ C(x) = 6x^3 + x^2 - 3$$

$$B(x) + C(x) = 7x^3 - 3x^2 - x - 3$$

$$A(x) = 3x^2 - 5x + 2$$

$$+ B(x) + C(x) = 7x^3 - 3x^2 - x - 3$$

$$A(x) + [B(x) + C(x)] = 7x^3 - 6x - 1$$

$$A(x) = 3x^2 - 5x + 2$$

$$+ B(x) = x^3 - 4x^2 - x$$

$$A(x) + B(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2$$

$$A(x) + B(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2$$

$$+ C(x) = 6x^3 + x^2 - 3$$

$$[A(x) + B(x)] + C(x) = 7x^3 - 6x - 1$$

Por tanto, sí se cumple la propiedad asociativa de la suma.

SOLUCIONES PÁG. 81

17 Realiza las siguientes multiplicaciones:

a. $5x^3 \cdot (6x^3 - 2x + 3)$

$$\begin{array}{r} 6x^3 - 2x + 3 \\ \cdot 5x^3 \\ \hline 30x^6 - 10x^4 + 15x^3 \end{array}$$

b. $(x^3 + 7x - 2) \cdot (-x^4)$

$$\begin{array}{r} x^3 + 7x - 2 \\ \cdot -x^4 \\ \hline -x^7 - 7x^5 + 2x^4 \end{array}$$

c. $(x + 3) \cdot (x + 5)$

$$\begin{array}{r} x + 3 \\ \cdot x + 5 \\ \hline 5x + 15 \\ x^2 + 3x \\ \hline x^2 + 8x + 15 \end{array}$$

d. $(2xy^2 - 5x) \cdot (3x^2y + 1)$

$$\begin{array}{r} 2xy^2 - 5x \\ \cdot 3x^2y + 1 \\ \hline 6x^3y^3 - 15x^3y \\ \hline 6x^3y^3 + 2xy^2 - 15x^3y - 5x \end{array}$$

18 Sacar factor común de estas expresiones:

a. $-2x^4 + 4x^3 - 6x$

Se extraen los factores comunes de todos los sumandos:

$$-2x^4 + 4x^3 - 6x = 2x \cdot (-x^3 + 2x^2 - 3)$$

b. $\frac{2}{5}y^3 + \frac{1}{5}y^2 - \frac{3}{5}y$

$$\frac{2}{5}y^3 + \frac{1}{5}y^2 - \frac{3}{5}y = \frac{1}{5}y \cdot (2y^2 + y - 3)$$

c. $3xy^2 + 5x^2y - 2x^3y^3$

$$3xy^2 + 5x^2y - 2x^3y^3 = xy \cdot (3y + 5x - 2x^2y^2)$$

$$d. \frac{8}{3}a^9b^3 - \frac{16}{3}a^7b^4 - 4a^6b^2$$

$$\frac{8}{3}a^9b^3 - \frac{16}{3}a^7b^4 - 4a^6b^2 = 4a^6b^2 \cdot \left(\frac{2}{3}a^3b - \frac{4}{3}ab^2 - 1 \right)$$

19 Opera y reduce al máximo.

$$a. (x^5 - 3x^3) \cdot (2x^3 - x) =$$

$$= x^5 \cdot (2x^3 - x) - 3x^3 \cdot (2x^3 - x) = x^5 \cdot 2x^3 - x^5 \cdot x - 3x^3 \cdot 2x^3 + 3x^3 \cdot x =$$

$$= 2x^8 - 7x^6 + 3x^4$$

$$b. \left(2x^2 + \frac{1}{2}x - 4 \right) \cdot \left(-5x^2 - \frac{3}{2}x + 1 \right) =$$

$$2x^2 \cdot \left(-5x^2 - \frac{3}{2}x + 1 \right) + \frac{1}{2}x \cdot \left(-5x^2 - \frac{3}{2}x + 1 \right) - 4 \cdot \left(-5x^2 - \frac{3}{2}x + 1 \right) =$$

$$= -10x^4 - 3x^3 + 2x^2 - \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 20x^2 + 6x - 4 =$$

$$= -10x^4 - \frac{11}{2}x^3 + \frac{85}{4}x^2 + \frac{13}{2}x - 4$$

$$c. \left(4x^7 - \frac{5}{4}x^6 + \frac{3}{5}x^5 \right) \cdot \left(2x^4 - \frac{1}{3}x^2 \right) =$$

$$= 2x^4 \cdot \left(4x^7 - \frac{5}{4}x^6 + \frac{3}{5}x^5 \right) - \frac{1}{3}x^2 \cdot \left(4x^7 - \frac{5}{4}x^6 + \frac{3}{5}x^5 \right) =$$

$$= 8x^{11} - \frac{5}{2}x^{10} + \frac{6}{5}x^9 - \frac{4}{3}x^9 + \frac{5}{12}x^8 - \frac{1}{5}x^7 =$$

$$= 8x^{11} - \frac{5}{2}x^{10} - \frac{2}{15}x^9 + \frac{5}{12}x^8 - \frac{1}{5}x^7$$

$$d. \left(\frac{9}{2}x^5 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6} \right) \cdot \left(\frac{1}{4}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5} \right) =$$

$$= \frac{9}{2}x^5 \cdot \left(\frac{1}{4}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5} \right) + \frac{5}{3}x^3 \cdot \left(\frac{1}{4}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5} \right) - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{4}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5} \right) =$$

$$= \frac{9}{8}x^{10} - 3x^8 + \frac{9}{5}x^5 + \frac{5}{12}x^8 - \frac{10}{9}x^6 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{24}x^5 + \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{15} =$$

$$= \frac{9}{8}x^{10} - \frac{31}{12}x^8 - \frac{10}{9}x^6 + \frac{211}{120}x^5 + \frac{7}{9}x^3 - \frac{1}{15}$$

SOLUCIONES PÁG. 81

20 Realiza las siguientes divisiones de polinomios entre monomios:

a. $(21x^5 - 9x^4 + 3x^2 - 6x) : (3x)$

$$\begin{array}{r} 21x^5 - 9x^4 + 3x^2 - 6x \quad | \quad 3x \\ \hline -21x^5 - 9x^4 7x^4 - 3x^3 + x - 2 \\ \hline +9x^4 + 3x^2 \\ -3x^2 - 6x \\ +6x \end{array}$$

b. $(8x^7 + 12x^6 - 20x^4 - 16x^3 - 4x^2) : (-4x^2)$

$$\begin{array}{r} 8x^7 + 12x^6 - 20x^4 - 16x^3 - 4x^2 \quad | \quad -4x^2 \\ \hline -8x^7 + 12x^6 -2x^5 - 3x^4 + 5x^2 + 4x + 1 \\ \hline -12x^6 - 20x^4 \\ +20x^4 - 16x^3 \\ +16x^3 - 4x^2 \\ +4x^2 \end{array}$$

c. $(x^5 - x^4 - x^3 + x^2) : (-x^2)$

$$\begin{array}{r} x^5 - x^4 - x^3 + x^2 \quad | \quad -x^2 \\ \hline -x^5 - x^4 -x^3 + x^2 + x - 1 \\ \hline +x^4 - x^3 \\ +x^3 + x^2 \\ -x^2 \end{array}$$

d. $(5x^9 + 10x^8 - 20x^7 + 3x^6 - 2x^4) : (5x^3)$

$$\begin{array}{r} 5x^9 + 10x^8 - 20x^7 + 3x^6 - 2x^4 \quad | \quad 5x^3 \\ \hline -5x^9 + 10x^8 x^6 + 2x^5 - 4x^4 + \frac{3}{5}x^3 - \frac{2}{5}x \\ \hline -10x^8 - 20x^7 \\ +20x^7 + 3x^6 \\ -3x^6 - 2x^4 \\ +2x^4 \end{array}$$

21 Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a. $(3x^3 + 13x^2 - 13x + 2) : (3x - 2)$

$$\begin{array}{r}
 3x^3 + 13x^2 - 13x + 2 \quad | \quad 3x - 2 \\
 \underline{-3x^3 \quad + 2x^2} \\
 +15x^2 - 13x \\
 \underline{-15x^2 + 10x} \\
 -3x + 2 \\
 \underline{x - 2} \\
 c(x) = x^2 + 5x - 1 \quad r(x) = 0
 \end{array}$$

b. $(x^3 - 12x + 15) : (x - 3)$

$$\begin{array}{r}
 x^3 \quad | \quad x - 3 \\
 \underline{-x^3 + 3x^2} \\
 +3x^2 - 12x \\
 \underline{-3x^2 + 9x} \\
 -3x + 15 \\
 \underline{+3x - 9} \\
 6 \\
 c(x) = x^2 + 3x - 3 \quad r(x) = 6
 \end{array}$$

c. $(x^7 + x^5 + 6x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 7x - 6) : (x^3 + x + 3)$

$$\begin{array}{r}
 x^7 + x^5 + 6x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 7x - 6 \quad | \quad x^3 + x + 3 \\
 \underline{-x^7 - x^5 - 3x^4} \\
 +3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 7x \\
 \underline{-3x^4 - 3x^2 - 9x} \\
 -2x^3 - 2x - 6 \\
 \underline{+2x^3 + 2x + 6} \\
 c(x) = x^4 + 3x - 2 \quad r(x) = 0
 \end{array}$$

d. $(-20x^6 + 18x^4 - 29x^2 + 2x + 9) : (5x^2 - 2)$

$$\begin{array}{r}
 -20x^6 + 18x^4 - 29x^2 + 2x + 9 \quad | \quad 5x^2 - 2 \\
 \underline{+20x^6 - 8x^4} \\
 +10x^4 - 29x^2 \\
 \underline{-10x^4 + 4x^2} \\
 -25x^2 + 2x + 9 \\
 \underline{+25x^2 + 2x - 10} \\
 +2x - 1 \\
 c(x) = -4x^4 + 2x^2 - 5 \quad r(x) = 2x - 1
 \end{array}$$

e. $(-12x^7 + 10x^6 - 2x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 3x) : (-3x^3 + x^2)$

$$\begin{array}{r}
 -12x^7 + 10x^6 - 2x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 3x \quad | \quad -3x^3 + x^2 \\
 +12x^7 - 4x^6 \\
 \hline
 +6x^6 - 2x^5 \\
 -6x^6 + 2x^5 - 3x^3 + 2x^2 \\
 \hline
 +3x^3 - x^2 \\
 +x^2 + 3x \\
 \hline
 3x
 \end{array}$$

$c(x) = 4x^4 - 2x^3 + 1; r(x) = x^2 + 3x$

- 22 Halla un polinomio, $C(x)$, que, multiplicado por $A(x) = 6x^3 + 3x^2 - x - 2$, dé como resultado $B(x) = -12x^5 + 18x^4 + 14x^3 - 8x$.

$$\begin{array}{r}
 -12x^5 + 18x^4 + 14x^3 - 8x \quad | \quad 6x^3 + 3x^2 - x - 2 \\
 +12x^5 + 6x^4 - 2x^3 - 4x^2 \\
 \hline
 +24x^4 + 12x^3 - 4x^2 - 8x \\
 -24x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 8x \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$C(x) = -2x^2 + 4x$$

- 23 Halla el cociente de una división de la que se conocen el dividendo, $D(x) = 2x^5 - 5x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 7x - 5$; el divisor, $d(x) = 2x^2 + 3x$, y el resto, $r(x) = x - 5$.

$$\begin{array}{r}
 2x^5 - 5x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 7x - 5 \quad | \quad 2x^2 + 3x \\
 -2x^5 - 3x^4 \\
 \hline
 -8x^4 - 12x^3 \\
 +8x^4 + 12x^3 + 4x^2 + 7x \\
 \hline
 -4x^2 - 6x \\
 x - 5 \\
 \hline
 x - 5
 \end{array}$$

$c(x) = x^3 - 4x^2 + 2$

También se puede utilizar la expresión:

$$c(x) = \frac{D(x) - r(x)}{d(x)} = \frac{2x^5 - 5x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 7x - 5 - x + 5}{2x^2 + 3x} = x^3 - 4x^2 + 2$$

- 24 Encuentra un polinomio cuya división entre $-3x^2 + 4x - 5$ dé como cociente $2x - 7$ y como resto -4 .

$$D(x) = d(x) \cdot c(x) + r(x) \Rightarrow D(x) = (-3x^2 + 4x - 5) \cdot (2x - 7) + (-4) \Rightarrow$$

$$D(x) = 2x \cdot (-3x^2 + 4x - 5) - 7 \cdot (-3x^2 + 4x - 5) - 4 \Rightarrow$$

$$D(x) = -6x^3 + 8x^2 - 10x + 21x^2 - 28x + 35 - 4 \Rightarrow D(x) = -6x^3 + 29x^2 - 38x + 31$$

25 De una división se conoce el dividendo,

$D(x) = 3x^6 - 10x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2x - 5$; el divisor, $d(x) = x^2 - 3x$, y el cociente, $c(x) = 3x^4 - x^3 + 4x$. Halla el resto sin hacer la división.

$$D(x) = d(x) \cdot c(x) + r(x) \Rightarrow r(x) = D(x) - d(x) \cdot c(x) \Rightarrow$$

$$r(x) = (3x^6 - 10x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2x - 5) - (x^2 - 3x) \cdot (3x^4 - x^3 + 4x) \Rightarrow$$

$$r(x) = 3x^6 - 10x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2x - 5 - 3x^6 + x^5 - 4x^3 + 9x^5 - 3x^4 + 12x^2 \Rightarrow$$

$$r(x) = 3x^6 - 10x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2x - 5 - 3x^6 + x^5 - 4x^3 + 9x^5 - 3x^4 + 12x^2 \Rightarrow$$

$$r(x) = 2x - 5$$

26 Halla el divisor de una división de la que se conocen el dividendo, $D(x) = 3x^4 + 12x^3 - 7x^2 - 7x + 4$; el cociente, $c(x) = 3x^2 - 1$, y el resto, $r(x) = -3x + 2$.

$$D(x) = d(x) \cdot c(x) + r(x) \Rightarrow$$

$$d(x) = \frac{D(x) - r(x)}{c(x)} = \frac{3x^4 + 12x^3 - 7x^2 - 7x + 4 - (-3x + 2)}{3x^2 - 1} \Rightarrow$$

$$d(x) = \frac{3x^4 + 12x^3 - 7x^2 - 7x + 4 + 3x - 2}{3x^2 - 1} = x^2 + 4x - 2$$

27 Sean los polinomios $A(x) = 6x^3 + 5x^2 + 11x + 20$, $B(x) = 3x + 4$ y $C(x) = 2x^2 + 5x - 1$.

a. ¿Es el polinomio $A(x)$ múltiplo de $B(x)$?

Si el resto de la división es cero, $r(x) = 0$, la división es **exacta**. En ese caso, se dice que $D(x)$ es un **múltiplo** de $d(x)$ o que es **divisible** entre $d(x)$.

$$\begin{array}{r} 6x^3 + 5x^2 + 11x + 20 \\ -6x^3 - 8x^2 \\ \hline -3x^2 + 11x \\ +3x^2 + 4x \\ \hline +15x + 20 \\ -15x - 20 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3x + 4 \\ 2x^2 - x + 5 \\ \hline \end{array}$$

Por tanto, el polinomio $A(x)$ es múltiplo de $B(x)$.

$$6x^3 + 5x^2 + 11x + 20 = (3x + 4) \cdot (2x^2 - x + 5)$$

b. ¿Es el polinomio $C(x)$ divisor del polinomio $A(x)$?

Si el resto de la división es cero, $r(x) = 0$, la división es exacta. En ese caso, se dice que $d(x)$ es un divisor de $D(x)$.

$$\begin{array}{r} 6x^3 + 5x^2 + 11x + 20 \\ -6x^3 - 15x^2 + 3x \\ \hline -10x^2 + 14x + 20 \\ +10x^2 + 25x - 5 \\ \hline r(x) = 39x + 15 \neq 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2x^2 + 5x - 1 \\ 3x - 5 \\ \hline \end{array}$$

Por tanto, el polinomio $C(x)$ no es divisor del polinomio $A(x)$.

- 28 Halla el valor de m para que la siguiente división sea exacta:
 $(-4x^4 + 6x^3 - 11x + m) : (2x + 3)$.

$$\begin{array}{r}
 -4x^4 + 6x^3 - 11x + m \\
 +4x^4 + 6x^3 \\
 \hline
 +12x^3 \quad -11x \\
 -12x^3 - 18x^2 - 11x \\
 \hline
 +18x^2 + 27x + m \\
 +16x + m \\
 \hline
 -16x - 24
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2x + 3 \\
 \hline
 -2x^3 + 6x^2 - 9x + 8
 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Para que $r(x) = 0$, $m = 24$

- 29 Determina el valor de m para que el resto de la siguiente división sea 3:
 $(20x^3 - 19x^2 + 8x + m) : (5x - 1)$.

$$\begin{array}{r}
 20x^3 - 19x^2 + 8x + m \\
 -20x^3 + 4x^2 \\
 \hline
 -15x^2 + 8x \\
 +15x^2 - 3x \\
 \hline
 +5x + m \\
 -5x + 1 \\
 \hline
 -5x + 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 5x - 1 \\
 \hline
 4x^2 - 3x + 1
 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Para que $r(x) = 3 = m + 1$; $m = 2$

- 30 Piensa un número cualquiera y multiplícalo por 2. Al resultado súmale primero 9 y después el número que pensaste. Divide el resultado entre 3 y al resultado súmale 4. Por último, resta al resultado el número que pensaste. ¿Es 7 tu resultado? Demuestra algebraicamente por qué el resultado da siempre 7.

$$\frac{2x + 9 + x}{3} + 4 - x = 7 \Rightarrow x + 3 + 4 = x + 7 \Rightarrow x + 7 - x = 7$$

SOLUCIONES PÁG. 85

- 31 Efectúa las divisiones aplicando la regla de Ruffini e indica el cociente y el resto.

a. $(x^3 - 3x^2 + 4x - 2) : (x - 1)$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -3 & 4 & -2 \\
 1 & & 1 & -2 & 2 \\
 \hline
 & 1 & -2 & 2 & 0
 \end{array}$$

$c(x) = x^2 - 2x + 2$ $r(x) = 0$

b. $(x^6 - 3x^5 - 10x^4 - 3x^3 + 16x^2 - 9x + 20) : (x - 5)$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} & 1 & -3 & -10 & -3 & +16 & -9 & +20 \\ 5 & & 5 & 10 & 0 & -15 & 5 & -20 \\ \hline & 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & -4 & 0 \end{array}$$

$c(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^2 + x - 4 \quad r(x) = 0$

c. $(x^4 - 3x^2 + 2) : (x + 3)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -3 & 0 & +2 \\ -3 & & -3 & 9 & -18 & 54 \\ \hline & 1 & -3 & 6 & -18 & 56 \end{array}$$

$c(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 18 \quad r(x) = 56$

d. $(x^5 - 1) : (x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}$$

$c(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \quad r(x) = -2$

e. $(4x^3 - 2x^2 - 6x + 3) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -2 & -6 & 3 \\ \frac{1}{2} & & 2 & 0 & -3 \\ \hline & 4 & 0 & -6 & 0 \end{array}$$

$c(x) = 4x^2 - 6 \quad r(x) = 0$

f. $(-5x^3 + 3x^2 + x - 2) : \left(x - \frac{2}{5}\right)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -5 & +3 & +1 & -2 \\ \frac{2}{5} & & -2 & \frac{2}{5} & \frac{14}{25} \\ \hline & -5 & 1 & \frac{7}{5} & -\frac{36}{25} \end{array}$$

$c(x) = -5x^2 + x + \frac{7}{5} \quad r(x) = -\frac{36}{25}$

32 Halla el cociente y el resto de la siguiente división: **$(5x^6 + 4x^4 - x^3 + 2x^2 - 3) : (x - 2)$; utiliza para ello dos métodos diferentes.**

Haciendo la división:

$$\begin{array}{r}
 5x^6 \quad + 4x^4 - x^3 + 2x^2 - 3 \quad | \quad x - 2 \\
 \underline{-5x^6 + 10x^5 + 4x^4} \\
 -10x^5 + 20x^4 \\
 \underline{+24x^4 - x^3} \\
 -24x^4 + 48x^3 \\
 \underline{+47x^3 + 2x^2} \\
 -47x^3 + 94x^2 \\
 \underline{+96x^2 - 3} \\
 -96x^2 + 192x - 3 \\
 \underline{+192x + 384} \\
 r(x) = +381
 \end{array}$$

$c(x) = 5x^5 + 10x^4 + 24x^3 + 47x^2 + 96x + 192$

Por el método Ruffini:

	5	0	4	-1	2	0	-3
2		10	20	48	94	192	384
	5	10	24	47	96	192	381

$$c(x) = 5x^5 + 10x^4 + 24x^3 + 47x^2 + 96x + 192$$

$$r(x) = +381$$

33 Un polinomio tiene como factores $(x - 3)$, $(x + 5)$ y $(x - 8)$. ¿Cuál es el valor numérico del polinomio en $x = 3$, $x = -5$ y $x = 8$?

Un polinomio, $P(x)$, tiene como factor $(x - a)$ si el valor numérico de dicho polinomio para el valor $x = a$ es cero, es decir, si $x = a$ es una raíz del polinomio $P(x)$.

Por tanto, los valores numéricos cumplen: $P(3) = P(-5) = P(8) = 0$

34 Comprueba si $(x - 5)$ es un factor del polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - 11x^3 + 6x^2 - 8x + 15.$$

$$\begin{aligned}
 P(5) &= 2 \cdot 5^4 - 11 \cdot 5^3 + 6 \cdot 5^2 - 8 \cdot 5 + 15 = 2 \cdot 625 - 11 \cdot 125 + 6 \cdot 25 - 40 + 15 = \\
 &= 1\,250 - 1\,375 + 150 - 25 = 1\,400 - 1\,400 = 0
 \end{aligned}$$

Por tanto, sí es un factor del polinomio, ya que $P(5) = 0$.

35 Utilizando la regla de Ruffini, comprueba si es raíz del polinomio **$P(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12$ alguno de estos números: 2, -1 y 3.**Se comprueba con $x = 2$

	1	2	-11	-12
2		2	4	-14
	1	2	-7	-28

Como $r(x) = -28 \neq 0$, $x = 2$ no es raíz del polinomio $P(x)$.Se comprueba con $x = -1$

	1	2	-11	-12
-1		-1	-1	+12
	1	1	-12	0

Como $r(x) = 0$, $x = -1$ sí es raíz del polinomio $P(x)$.Se comprueba con $x = 3$

	1	2	-11	-12
3		3	15	+12
	1	5	4	0

Como $r(x) = 0$, $x = 3$ sí es raíz del polinomio.**36 Halla el resto de la división $(2x^3 - 6x + 3) : (x - 7)$ utilizando el teorema del resto.**En el teorema del resto, la división del polinomio $P(x)$ entre un binomio de la forma $(x - a)$ es el valor numérico de dicho polinomio para el valor $x = a$.Es decir: $P(x) = (x - a) \cdot c(x) + r$ con $x = 7$

$$P(7) = (7 - 7) \cdot c(7) + r \Rightarrow 2 \cdot 7^3 - 6 \cdot 7 + 3 = 0 \cdot c(7) + r \Rightarrow 2 \cdot 343 - 42 + 3 = r \Rightarrow 686 - 39 = r \Rightarrow r = 647$$

37 Determina el valor que tiene m sabiendo que la división **$(-2x^3 - 6x^2 + 2x + m) : (x + 1)$ tiene por resto -2.**

Según el teorema del resto se cumple:

$$P(x) = (x - a) \cdot c(x) + r$$

$$P(-1) = -1 - (-1) \cdot c(-1) + (-2) \Rightarrow -2(-1)^3 - 6(-1)^2 + 2 \cdot (-1) + m = -2 \Rightarrow$$

$$2 - 6 - 2 + m = -2 \Rightarrow m = 4$$

SOLUCIONES PÁG. 87

38 Desarrolla las siguientes identidades notables:

a. $(x + 2)^2$

El cuadrado de una suma:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(x + 2)^2 = x^2 + 2^2 + 2 \cdot x \cdot 2$$

$$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

b. $(2x^3 - 3y)^2$

El cuadrado de una diferencia:

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(2x^3 - 3y)^2 = (2x^3)^2 + (3y)^2 - 2 \cdot (2x^3) \cdot (3y)$$

$$(2x^3 - 3y)^2 = 4x^6 + 9y^2 - 12x^3y$$

$$(2x^3 - 3y)^2 = 4x^6 - 12x^3y + 9y^2$$

c. $(x - 5)^2$

$$(x - 5)^2 = x^2 + 5^2 - 2 \cdot 5x$$

$$(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$$

d. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$$

e. $(3a + 1)^2$

$$(3a + 1)^2 = (3a)^2 + 1^2 + 2 \cdot (3a) \cdot 1$$

$$(3a + 1)^2 = 9a^2 + 6a + 1$$

f. $\left(\frac{5b^2}{2} + \frac{3b}{4}\right)^2$

$$\left(\frac{5b^2}{2} + \frac{3b}{4}\right)^2 = \left(\frac{5b^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{3b}{4}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{5b^2}{2}\right) \cdot \left(\frac{3b}{4}\right)$$

$$\left(\frac{5b^2}{2} + \frac{3b}{4}\right)^2 = \frac{25b^4}{4} + \frac{15b^3}{4} + \frac{9b^2}{16}$$

39 Efectúa estos productos:

a. $(x + 3) \cdot (x - 3)$

El producto de una suma de monomios por su diferencia es igual a la diferencia de sus cuadrados: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

$$(x + 3) \cdot (x - 3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$$

b. $(2y - 5) \cdot (2y + 5)$

$$(2y - 5) \cdot (2y + 5) = (2y)^2 - 5^2 = 4y^2 - 25$$

c. $(3x + y^2) \cdot (3x - y^2)$

$$(3x + y^2) \cdot (3x - y^2) = (3x)^2 - (y^2)^2 = 9x^2 - y^4$$

d. $\left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right)$

$$\left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) = x^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = x^2 - \frac{1}{9}$$

40 Copia en tu cuaderno y encuentra el valor de las letras para que las siguientes expresiones sean el cuadrado de un binomio:

a. $x^2 + 6x + A$

El cuadrado de una suma: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$$x^2 + 6x + A = x^2 + 2 \cdot 3x + A$$

Como $6x$ es $2 \cdot 3 \cdot x$, eso implica que el segundo es 3. Por tanto, $A = 3^2 = 9$.

b. $25x^2 - B + 4$

El cuadrado de una diferencia: $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

$$25x^2 - B + 4$$

Esto implica que B es el doble del producto de $a \cdot b$, a es $5x$, ya que a^2 es $25x^2$, y b es 2, es decir, b^2 es 4. Entonces:

$$B = 2 \cdot 5x \cdot 2 = 20x$$

c. $Cx^2 + 12x + 9$

El cuadrado de una suma: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

Los valores de los términos son: $b^2 = 9 = 3^2$, por tanto, $b = 3$

$2ab = 12x$, es decir, el doble del producto del primero (Cx) por el segundo (3):

$$12x = 2 \cdot C \cdot x \cdot 3, \text{ por tanto, } C = 2$$

41 Escribe los polinomios como un producto notable.

a. $x^2 - 8x + 16 = x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 = (x - 4)^2$

$$\begin{aligned} \text{b. } \frac{1}{4}x^2 - \frac{9}{4}y^2 &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{9}{4}y^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - \left(\frac{3}{2}y\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x\right) - \left(\frac{3}{2}y\right) \cdot \left(\frac{3}{2}y\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y\right) \end{aligned}$$

$$\text{c. } 9y^2 - 25 = 9y^2 - 25 = (3y)^2 - 5^2 = (3y + 5) \cdot (3y - 5)$$

$$\text{d. } x^2y^2 - z^4 = x^2y^2 - z^4 = (xy)^2 - (z^2)^2 = (xy + z^2) \cdot (xy - z^2)$$

$$\text{e. } 9b^4 + 12b^2 + 4 = 9b^4 + 12b^2 + 4 = (3b^2)^2 + 2 \cdot 3b^2 \cdot 2 + 2^2 = (3b^2 + 2)^2$$

$$\text{f. } \frac{a^2}{4} - a + 1 = \frac{a^2}{4} - a + 1 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot 1 + 1^2 = \left(\frac{a}{2} - 1\right)^2$$

42 Opera y simplifica.

$$\text{a. } (a - 3)^2 + (a + 3)^2$$

Se aplica el cuadrado de una diferencia y el cuadrado de una suma, respectivamente:

$$a^2 + 3^2 - 2 \cdot a \cdot 3 + a^2 + 3^2 + 2 \cdot a \cdot 3 = 2a^2 + 3^2 + 3^2 - 6a + 6a = 2a^2 + 18$$

$$\text{b. } (2x - 1)^2 - (2x + 1) \cdot (2x - 1)$$

Se aplica el cuadrado de una diferencia y la suma por diferencia:

$$(2x)^2 + 1^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 - (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 + 1 - 4x - 4x^2 + 1 = -4x + 2$$

$$\text{c. } (a + 2b)^2 - (a - 2b)^2$$

Se aplica el cuadrado de una suma y el cuadrado de una diferencia, respectivamente:

$$\begin{aligned} (a + 2b)^2 - (a - 2b)^2 &= a^2 + (2b)^2 + 2 \cdot a \cdot (2b) - [a^2 + (2b)^2 - 2 \cdot a \cdot 2b] = \\ &= a^2 + (2b)^2 + 4ab - a^2 - (2b)^2 + 4ab = 8ab \end{aligned}$$

$$\text{d. } (x + 1) \cdot (x - 1) + (x - 1)^2 - (x + 1)^2$$

Se aplica la suma por diferencia, el cuadrado de una diferencia y el cuadrado de una suma, respectivamente:

$$\begin{aligned} (x + 1) \cdot (x - 1) + (x - 1)^2 - (x + 1)^2 &= \\ &= x^2 - 1^2 + x^2 + 1^2 - 2 \cdot x \cdot 1 - (x^2 + 1^2 + 2 \cdot x \cdot 1) = \\ &= x^2 - 1^2 + x^2 + 1^2 - 2x - x^2 - 1^2 - 2x = 2x^2 - x^2 - 2 + 1 - 2x - 2x = x^2 - 4x - 1 \end{aligned}$$

43 Efectúa las siguientes potencias:

$$\text{a. } (x + 3)^3$$

$$\begin{aligned} (x + 3)^3 &= (x + 3) \cdot (x + 3)^2 = (x + 3) \cdot (x^2 + 3^2 + 2 \cdot x \cdot 3) = \\ &= (x + 3) \cdot (x^2 + 6x + 9) = x \cdot (x^2 + 6x + 9) + 3 \cdot (x^2 + 6x + 9) = \\ &= x^3 + 6x^2 + 9x + 3x^2 + 18x + 27 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27 \end{aligned}$$

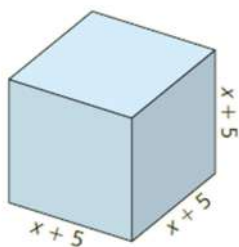
b. $(4x^2 + 5x - 1)^2$

$$\begin{aligned}(4x^2 + 5x - 1)^2 &= (4x^2 + 5x - 1) \cdot (4x^2 + 5x - 1) = \\&= 4x^2 \cdot (4x^2 + 5x - 1) + 5x \cdot (4x^2 + 5x - 1) - 1 \cdot (4x^2 + 5x - 1) = \\&= 4x^4 + 20x^3 - 4x^2 + 20x^3 + 25x^2 - 5x - 4x^2 - 5x + 1 = \\&= 4x^4 + 40x^3 + 17x^2 - 10x + 1\end{aligned}$$

c. $(x^2 - 2x + 3)^3$

$$\begin{aligned}(x^2 - 2x + 3)^3 &= (x^2 - 2x + 3) \cdot (x^2 - 2x + 3) \cdot (x^2 - 2x + 3) = \\&= (x^2 - 2x + 3) \cdot (x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9) = \\&= x^6 - 4x^5 + 10x^4 - 12x^3 + 9x^2 - 2x^5 + 8x^4 - 20x^3 + 24x^2 - 18x + 3x^4 - 12x^3 + 30x^2 \\&\quad - 36x + 27 = x^6 - 6x^5 + 21x^4 - 44x^3 - 63x^2 - 54x + 27\end{aligned}$$

- 44 Halla la expresión algebraica del área y del volumen de un cubo cuya arista es $(x + 5)$.**



El área de un cubo es el área de una cara multiplicada por 6:

$$A = \text{arista}^2 \cdot 6$$

El volumen de un cubo es:

$$V = \text{arista}^3$$

Como la arista es un monomio:

$$A(x) = (x + 5)^2 \cdot 6 = 6 \cdot (x^2 + 10x + 25) = 6x^2 + 60x + 150$$

$$\begin{aligned}V(x) &= (x + 5)^3 = (x + 5) \cdot (x + 5) \cdot (x + 5) = (x + 5) \cdot (x^2 + 10x + 25) = \\&= x^3 + 10x^2 + 25x + 5x^2 + 50x + 125 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125\end{aligned}$$

- 45 Actividad resuelta.**

- 46 Investiga en Internet sobre el binomio de Newton y su relación con el triángulo de Tartaglia o de Pascal. Establece su vinculación con las identidades notables.**

En el triángulo de Tartaglia o de Pascal aparecen en cada nivel los coeficientes de las potencias de los binomios de Newton, es decir, de los binomios de la forma $(a + b)^n$.

Binomio de Newton	Triángulo de Tartaglia
$(a + b)^0$	1
$(a + b)^1$	1 1
$(a + b)^2$	1 2 1
$(a + b)^3$	1 3 3 1
$(a + b)^4$	1 4 6 4 1
$(a + b)^5$	1 5 10 10 5 1

SOLUCIONES PÁG. 89

- 47 Factoriza las siguientes expresiones:**

a. $x^2 + 10x + 25$

Factorizar un polinomio consiste en expresarlo como producto de polinomios irreducibles.

Como tiene término independiente y sí es una identidad notable (cuadrado de una suma), se factoriza:

$$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot 5x + 5^2 = (x + 5)^2$$

b. $4y^2 - 16$

Como tiene término independiente y sí es una identidad notable (suma por diferencia), se factoriza:

$$4y^2 - 16 = (2y)^2 - 4^2 = (2y + 4) \cdot (2y - 4)$$

c. $25b^3 - 20b^2 + 4b$

Como no tiene término independiente, sacamos factor común:

$$25b^3 - 20b^2 + 4b = b \cdot (25b^2 - 20b + 4)$$

El grado del polinomio del paréntesis es 2, es una identidad notable, cuadrado de una diferencia:

$$b \cdot (25b^2 - 20b + 4) = b \cdot [(5b)^2 + 2^2 - 2 \cdot 5b \cdot 2] = b \cdot (5b - 2)^2$$

d. $x^4 - 6x^3 + 9x^2$

Como no tiene término independiente, sacamos factor común:

$$x^4 - 6x^3 + 9x^2 = x^2 \cdot (x^2 - 6x + 9)$$

El grado del polinomio del paréntesis es 2, es una identidad notable, cuadrado de una diferencia:

$$x^2 \cdot (x^2 - 6x + 9) = x^2 \cdot (x^2 + 3^2 - 2 \cdot x \cdot 3) = x^2 \cdot (x - 3)^2$$

e. $3x^5 - 9x^3$

Como no tiene término independiente, sacamos factor común:

$$3x^5 - 9x^3 = x^3 \cdot (3x^2 - 9) = 3x^3 \cdot (x^2 - 3)$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado (ya que no es una identidad notable):

$$3x^3 \cdot (x^2 - 3) = 3x^3 \cdot (x + \sqrt{3}) \cdot (x - \sqrt{3})$$

f. $9x^2 + 16y^2 + 24xy$

Es un polinomio de grado = 2; es una identidad notable (cuadrado de una suma):

$$9x^2 + 16y^2 + 24xy = (3x)^2 + (4y)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot (4y) = (3x + 4y)^2$$

g. $\frac{1}{4}a^2 + 3a + 9$

Es un polinomio de grado = 2; es una identidad notable (cuadrado de una suma):

$$\frac{1}{4}a^2 + 3a + 9 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + 3^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}a\right) \cdot 3 = \left(\frac{1}{2}a + 3\right)^2$$

h. $\frac{4}{9}y^4 - \frac{1}{25}y^6$

Como no tiene término independiente, sacamos factor común:

$$\frac{4}{9}y^4 - \frac{1}{25}y^6 = y^4 \cdot \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{25}y^2\right) = y^4 \cdot \left(\frac{2^2}{3^2} - \frac{1}{5^2}y^2\right) = y^4 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}y\right) \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}y\right)$$

48 Factoriza los siguientes polinomios y di cuáles son sus raíces:

a. $x^3 - 2x^2 - x + 2$

Como es un polinomio de grado mayor de 2 y tiene término independiente, se utiliza Ruffini:

1	1	-2	-1	2
1		1	-1	-2
	1	-1	-2	0
-1		-1	+2	
	1	-2	0	

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 2) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1); \text{ las raíces son: } 2, 1 \text{ y } -1.$$

b. $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

Como es un polinomio de grado mayor de 2 y tiene término independiente, se utiliza Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 3 & -4 & -12 \\
 2 & & 2 & 10 & 12 \\
 \hline
 & 1 & 5 & 6 & 0 \\
 -2 & & -2 & -6 & \\
 \hline
 & 1 & 3 & 0 &
 \end{array}$$

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3); \text{ las raíces son: } 2, -2 \text{ y } -3.$$

c. $2x^3 - 6x + 4$

Es múltiplo de 2:

$$2x^3 - 6x + 4 = 2 \cdot (x^3 - 3x + 2)$$

Como es un polinomio de grado mayor de 2 y tiene término independiente, se utiliza Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -3 & 2 \\
 1 & & 1 & 1 & -2 \\
 \hline
 & 1 & 1 & -2 & 0 \\
 -2 & & -2 & +2 & \\
 \hline
 & 1 & -1 & 0 &
 \end{array}$$

$$2 \cdot (x^3 - 3x + 2) = (x - 1)^2 \cdot (x + 2); \text{ las raíces son: } 1 \text{ y } -2.$$

d. $x^3 + 2x^2 + x + 2$

Como es un polinomio de grado mayor de 2 y tiene término independiente, se utiliza Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 2 & 1 & 2 \\
 -2 & & -2 & 0 & -2 \\
 \hline
 & 1 & 0 & 1 & 0
 \end{array}$$

$$x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x + 2) \cdot (x^2 + 1); \text{ la raíz es: } -2.$$

e. $x^4 - 16$

$$x^4 - 16 = 0; x = \sqrt[4]{16} = \pm 2; \text{ las raíces son: } 2 \text{ y } -2$$

$$x^4 - 16 = (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x^2 + 4)$$

f. $2x^3 + 3x^2 - 1$

Como es un polinomio de grado mayor de 2 y tiene término independiente, se utiliza Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 3 & 0 & -1 \\
 -1 & & -2 & -1 & 1 \\
 \hline
 & 2 & 1 & -1 & 0 \\
 -1 & & -2 & 1 & \\
 \hline
 & 2 & -1 & 0 &
 \end{array}$$

$2x^3 + 3x^2 - 1 = (x + 1)^2 \cdot (2x - 1)$; las raíces son -1 y $\frac{1}{2}$.

g. $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x$

Se saca factor común:

$$x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x = x \cdot (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)$$

Ahora hemos obtenido un polinomio de grado mayor de 2 y tiene término independiente, (hemos obtenido una solución o raíz para $x = 0$) se utiliza Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & -5 & 6 \\
 1 & & 1 & -1 & -6 \\
 \hline
 & 1 & -1 & -6 & 0
 \end{array}$$

$$x \cdot (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) = (x - 1) \cdot (x^2 - x - 6)$$

Se resuelve la ecuación de segundo grado:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x = 3; x = -2$$

$$x \cdot (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) = x \cdot (x - 1) \cdot (x^2 - x - 6) = x \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x + 2)$$

Las raíces son 0, 1, 3, y -2 .

h. $x^4 - x^3 - 3x^2 + 3x$

Se saca factor común:

$$x^4 - x^3 - 3x^2 + 3x = x \cdot (x^3 - x^2 - 3x + 3)$$

Para el polinomio que tiene un grado mayor de 2 (hemos obtenido una solución o raíz para $x = 0$) y un término independiente, se utiliza Ruffini:

1	-1	-3	3	
1		1	0	-3
	1	0	-3	0

$$x^4 - x^3 - 3x^2 + 3x = x \cdot (x^3 - x^2 - 3x + 3) = x \cdot (x - 1) \cdot (x^2 - 3) =$$

$$= x \cdot (x - 1) \cdot (x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3})$$

Las raíces son: 0, 1, $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$.

i. $x^3 - 3x + 2$

Por Ruffini:

	1	0	-3	2	
1		1	1	-2	
	1	1	-2	0	
1		1	2		
	1	2	0		

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2 \cdot (x + 2), \text{ las raíces son: } 1 \text{ y } -2.$$

j. $x^5 - 3x^4 + 4x^2$

$$x^5 - 3x^4 + 4x^2 = x^2 \cdot (x^3 - 3x^2 + 4)$$

Por Ruffini:

	1	-3	0	4	
-1		-1	4	-4	
	1	-4	4	0	
2		2	-4		
	1	-2	0		

$$x^5 - 3x^4 + 4x^2 = x^2 \cdot (x^3 - 3x^2 + 4) = x^2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 2) =$$

$$= x^2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)^2$$

Las raíces son: 0, -1 y 2.

49 Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

$$\text{a. } \frac{2y^2}{10x} = \frac{2y^2}{10x} = \frac{y^2}{5x}$$

$$\text{b. } \frac{12x^4}{6x} = \frac{12x^4}{6x} = \frac{6 \cdot 2x \cdot x^3}{6x} = 2x^3$$

$$\text{c. } \frac{x^2 \cdot (x+1)}{x^4 \cdot (x-1)} = \frac{x^2 \cdot (x+1)}{x^4 \cdot (x-1)} = \frac{x^2 \cdot (x+1)}{x^2 \cdot x^2 \cdot (x-1)} = \frac{(x+1)}{x^2(x-1)}$$

$$\text{d. } \frac{3x^2 \cdot (x-2)}{x \cdot (x-2)} = \frac{3x^2 \cdot (x-2)}{x \cdot (x-2)} = \frac{3x \cdot x \cdot (x-2)}{x \cdot (x-2)} = 3x$$

$$\text{e. } \frac{8x^2 \cdot (x+3)^4}{4x^3 \cdot (x+3)^2} = \frac{8x^2 \cdot (x+3)^4}{4x^3 \cdot (x+3)^2} = \frac{4 \cdot 2 \cdot x^2 \cdot (x+3)^2 \cdot (x+3)^2}{4 \cdot x \cdot x^2 \cdot (x+3)^2} = \frac{2(x+3)^2}{x}$$

$$\text{f. } \frac{2x \cdot (x+1)}{(x+1) \cdot (x-1)} = \frac{2x \cdot (x+1)}{(x+1) \cdot (x-1)} = \frac{2x}{(x-1)}$$

50 Simplifica estas fracciones algebraicas:

$$\text{a. } \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4}$$

$$x^2 + 4x + 4 = x + 2 \cdot 2x + 2^2 = (x+2)^2$$

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} = \frac{(x+2)^2}{(x+2) \cdot (x-2)} = \frac{(x+2)}{(x-2)}$$

$$\text{b. } \frac{20x^3 - 45x}{20x^2 - 60x + 45}$$

$$20x^2 - 60x + 45 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{60 \pm \sqrt{60^2 - 4 \cdot 20 \cdot 45}}{2 \cdot 20} = \frac{60 \pm \sqrt{3600 - 3600}}{40} = \frac{60}{40} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{20x^3 - 45x}{20x^2 - 60x + 45} = \frac{5x \cdot (4x^2 - 9)}{5 \cdot (2x-3) \cdot (2x-3)} = \frac{5x \cdot (2x-3) \cdot (2x+3)}{5 \cdot (2x-3) \cdot (2x-3)} = \frac{x \cdot (2x+3)}{(2x-3)}$$

c. $\frac{2x^2 + 4x + 2}{3x^2 - 3}$

$$2x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\frac{2x^2 + 4x + 2}{3x^2 - 3} = \frac{2 \cdot (x+1) \cdot (x+1)}{3 \cdot (x-1) \cdot (x+1)} = \frac{2 \cdot (x+1)}{3 \cdot (x-1)}$$

d. $\frac{(x-1)^2}{(x+1) \cdot (x-1)}$

$$\frac{(x-1)^2}{(x+1) \cdot (x-1)} = \frac{(x-1) \cdot (x-1)}{(x+1) \cdot (x-1)} = \frac{(x-1)}{(x+1)}$$

e. $\frac{x^3 \cdot (x+2)}{x^3 + 4x^2 + 4x}$

$$x^3 + 4x^2 + 4x = x \cdot (x^2 + 4x + 4) = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\frac{x^3 \cdot (x+2)}{x^3 + 4x^2 + 4x} = \frac{x^3 \cdot (x+2)}{x(x+2) \cdot (x+2)} = \frac{x^2}{(x+2)}$$

f. $\frac{x^3 + x^2 - 8x - 12}{x^4 - x^3 - 6x^2}$

Se descompone el numerador por Ruffini:

1	1	-8	-12	
-2	-2	2	12	
1	-1	-6	0	
3	3	6		
1	2	0		

Entonces, $x^3 + x^2 - 8x - 12 = (x+2)^2 \cdot (x-3)$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 = x^2 \cdot (x^2 - x - 6) = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

$$\frac{x^3 + x^2 - 8x - 12}{x^4 - x^3 - 6x^2} = \frac{(x+2)^2 \cdot (x-3)}{x^2 \cdot (x+2) \cdot (x-3)} = \frac{(x+2)}{x^2}$$

g. $\frac{x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x}{x^3 + x^2 - 2x}$

Se descompone el numerador: $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = x \cdot (x^3 + 2x^2 - x - 2) = 0$.

Por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & & -1 & -2 & \\ \hline & 1 & 2 & & 0 \end{array}$$

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)$$

Se descompone el denominador: $x^3 + x^2 - 2x = x \cdot (x^2 + x - 2)$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$$\frac{x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)}{x \cdot (x + 2) \cdot (x - 1)} = x + 1$$

h. $\frac{3x^5 + 6x^4 + 3x^3}{3x^3 - 3x}$

Se descompone el numerador: $3x^5 + 6x^4 + 3x^3 = x^3 \cdot (3x^2 + 6x + 3)$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{6} = -1$$

$$\frac{3x^5 + 6x^4 + 3x^3}{3x^3 - 3x} = \frac{3 \cdot x^3 \cdot (x + 1)^2}{3x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)} = \frac{x^2 \cdot (x + 1)}{(x - 1)}$$

SOLUCIONES PÁG. 91

- 1 Dado un polinomio, $A(x)$, ¿existe algún otro polinomio, $B(x)$, que dé el mismo resultado al sumarse que al restarse a $A(x)$? ¿Es único?

Sí, el polinomio nulo $0(x)$, con todos sus coeficientes nulos. Además, es único.

- 2 Los polinomios $A(x)$ y $B(x)$ son de grado 3. ¿Se puede afirmar que el grado del polinomio que resulta de sumar $A(x) + B(x)$ es de grado 3? Razona tu respuesta y, en caso de que sea negativa, pon un ejemplo.

No se puede afirmar, pues si los coeficientes de los monomios de grado 3 son opuestos el polinomio resultante de sumar no tendría monomio de grado 3. Por ejemplo: $A(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 4$ y $B(x) = x^3 + 5x^2 - 3x + 1$.

3 ¿Es el valor numérico de un polinomio único?

No, hay infinitos, tantos como valores de las variables.

4 Escribe tres polinomios que cumplan las siguientes condiciones:

- El primero, $A(x)$, debe ser de cuarto grado sin término independiente.
- El segundo, $B(x)$, ha de ser de grado 2 con coeficiente principal 1.
- El tercero, $C(x)$, debe ser un binomio de la forma $(x - a)$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$A(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x$$

$$B(x) = x^2 + x - 3$$

$$C(x) = x - 1$$

5 Con los polinomios anteriores, calcula:

Respuesta abierta. Siguiendo el ejemplo anterior:

a. $A(x) + B(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x + x^2 + x - 3 = x^4 + x^3 - x^2 - 3x - 3$

b. $A(x) - B(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - x^2 - x + 3 = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x + 3$

c. $A(x) \cdot B(x) = (x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x) \cdot (x^2 + x - 3) =$
 $= x^6 + x^5 - 2x^4 - 4x^3 + x^5 + x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 3x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 12x =$
 $= x^6 + 2x^5 - 4x^4 - 9x^3 + 2x^2 + 12x$

d. $A(x) : B(x) \rightarrow C(x) = x^2 + 1; R(x) = -5x + 3$

e. $A(x) : C(x) \rightarrow C(x) = x^3 + 2x^2 - 4; R(x) = -4$

f. $[C(x)]^2 = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$

g. $A(2) = 2^4 + 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 16 + 8 - 8 - 8 = 8$

h. $B(-3) = (-3)^2 + (-3) - 3 = 9 - 3 - 3 = 3$

6 ¿Cuál es el valor numérico de un polinomio, $P(x)$, en $x = 0$?

Coincide con el término independiente.

7 ¿Es posible que un polinomio tenga en dos valores distintos de su variable un mismo valor numérico? En caso afirmativo, pon un ejemplo.

Sí es posible. Por ejemplo, en el polinomio $P(x) = x^2 + 3x - 1$

$$P(1) = 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 = 3$$

$$P(-4) = (-4)^2 + 3 \cdot (-4) - 1 = 3$$

8 Si a es raíz de un polinomio, $P(x)$, ¿cuánto vale $P(a)$?

$P(a) = 0$.

9 ¿Puede un polinomio de grado 3 tener 4 raíces?

No, como máximo puede tener 3 raíces.

10 Prepara una presentación para tus compañeros. Puedes hacer un documento PowerPoint, usar Glogster, ...

Repuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 92 - REPASO FINAL

POLINOMIOS. VALOR NUMÉRICO

1 Reduce los siguientes polinomios y escríbelos ordenados. Indica el grado, el número de términos, el coeficiente principal y el término independiente.

a. $5x^3 - 6x + 3x^2 - x - 4x^3 - 3x^2 + 2x$

$$5x^3 - 4x^3 - 3x^2 + 3x^2 - 6x - x + 2x = x^3 - 5x$$

Grado 3; número de términos, 2; coeficiente principal, 1; término independiente, no hay.

b. $-3 - x^2 + 5x - x^2 + 3x^4 - 2x^4 + 12 - 7x^2$

$$3x^4 - 2x^4 - x^2 - x^2 - 7x^2 + 5x - 3 + 12 = x^4 - 9x^2 + 5x + 9$$

Grado 4; número de términos, 4; coeficiente principal, 1; término independiente, 9.

c. $2xy - 3xy^2 - 8xy - 1 + xy^2 - 10xy^2 - 3$

$$-3xy^2 + xy^2 - 10xy^2 + 2xy - 8xy - 1 - 3 = -12xy^2 - 6xy - 4$$

Grado 3; número de términos, 3; coeficiente principal, -12; término independiente, -4.

d. $9b^5 - 6b^3 + 2 - 4 - b^3 + 2b^4$

$$9b^5 + 2b^4 - 6b^3 - b^3 + 2 - 4 = 9b^5 + 2b^4 - 7b^3 - 2$$

Grado 5; número de términos, 4; coeficiente principal, 9; término independiente, -2.

2 Indica cuáles de las siguientes afirmaciones sobre el polinomio

$P(x) = 9x^2 - 5x + 3x^3 + 1$ son correctas. Justifica tus respuestas.

a. Es un polinomio ordenado y completo.

Falsa. Es completo pero no ordenado.

b. Su coeficiente principal es 9.

Falsa. Su coeficiente principal es 3, ya que es el coeficiente que acompaña a la incógnita de mayor grado.

c. Tiene cuatro términos y es de grado 3.

Verdadera.

d. No tiene término independiente.

Falsa. El término independiente es 1.

- 3 Halla el valor numérico de los siguientes polinomios en los valores indicados. Comprueba tus resultados con Wiris.

a. $A(x) = x^5 - 4x^4 + 6x^2 - 3$, para $x = -1$

$$(-1)^5 - 4 \cdot (-1)^4 + 6 \cdot (-1)^2 - 3 = -1 - 4 + 6 - 3 = -2$$

b. $B(x) = 2x^4 + 7x^3 - x^2 + 5x + 4$, para $x = 2$

$$2 \cdot 2^4 + 7 \cdot 2^3 - 2^2 + 5 \cdot 2 + 4 = 32 + 56 - 4 + 10 + 4 = 98$$

c. $C(x) = -6x^3 + 4x^2 - 8x + 2$, para $x = \frac{5}{2}$

$$-6 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 8 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) + 2 = -\left(\frac{375}{4}\right) + 25 - 20 + 2 = -\left(\frac{347}{4}\right)$$

- 4 Determina el valor numérico que tiene el polinomio

$A(x, y) = xy^3 + 3x^2 - 5y + 2xy$, para estos valores:

a. $A(2, -1) = 2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot (-1) = -2 + 12 + 5 - 4 = 11$

b. $A(-3, 5) = (-3) \cdot 5^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 5 \cdot 5 + 2 \cdot (-3) \cdot 5 = -375 + 27 - 25 - 30 = -403$

c. $A(3, 0) = 3 \cdot 0^3 + 3 \cdot 3^2 - 5 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 0 = 0 + 27 + 0 + 0 = 27$

d. $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right) =$

$$= -\frac{27}{16} + \frac{3}{4} - \frac{15}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{159}{16}$$

- 5 Halla el valor de m para que el valor numérico del polinomio

$P(x) = -4x^3 + 5x^2 + mx + 9$, en $x = 2$, sea 3.

$$P(2) = -4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 + m \cdot 2 + 9 = -32 + 20 + 2m + 9 = 2m - 3$$

$$2m - 3 = 3 \Rightarrow 2m = 6 \Rightarrow m = 3$$

- 6 Calcula el valor de m para que el valor numérico del polinomio

$P(x) = 3xy + x^2y - 3my + 5$, en $x = -1$ e $y = 2$, sea 0.

$$3 \cdot (-1) \cdot 2 + (-1)^2 \cdot 2 - 3m \cdot 2 + 5 = -6 + 2 - 6m + 5 = -6m + 1$$

$$-6m + 1 = 0 \Rightarrow 6m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{6}$$

7 Determina si alguno de los siguientes valores es raíz del polinomio

$$P(x) = 3x^4 - x^3 + 2x - 2:$$

a. $x = -1 \rightarrow P(-1) = 3 \cdot (-1)^4 - (-1)^3 + 2 \cdot (-1) - 2 = 3 + 1 - 2 - 2 = 0$. Sí es raíz.

b. $x = 3 \rightarrow P(3) = 3 \cdot 3^4 - 3^3 + 2 \cdot 3 - 2 = 243 - 27 + 6 - 2 = 220$. No es raíz.

c. $x = \frac{5}{3} \rightarrow P\left(\frac{5}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^4 - \left(\frac{5}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right) - 2 = \frac{625}{27} - \frac{125}{27} + \frac{10}{3} - 2 = \frac{536}{27}$. No es raíz.

d. $x = 0 \rightarrow P(0) = 3 \cdot 0^4 - 0^3 + 2 \cdot 0 - 2 = 0 - 0 + 0 - 2 = -2$. No es raíz.

8 ¿Tiene el polinomio $A(x) = x^2 + 4$ alguna raíz entera? ¿Y racional? Justifica tus respuestas.

$$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4}$$

Por lo tanto, no tiene raíces enteras ni racionales, puesto que los únicos valores que hacen que $A(x) = 0$ son $x = \pm\sqrt{-4}$

SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS

9 Copia en tu cuaderno y encuentra el valor de las letras para que las siguientes sumas de polinomios sean correctas:

$$\begin{array}{r} -2x^3 + A + 3x - 7 \\ + 5x^3 - 4x^2 + B + 2 \\ \hline C + 3x^2 + 4x - 5 \end{array}$$

$$A = 7x^2, B = x, C = 3x^3$$

$$\begin{array}{r} -4x^4 + A + x^2 - B + 8 \\ + C - 3x^3 - D + 9x - E \\ \hline -6x^4 + x^3 \quad - x + 3 \end{array}$$

$$A = 4x^3, B = 10x, C = -2x^4, D = x^2, E = 5$$

10 Calcula las operaciones propuestas con los siguientes polinomios. Comprueba tus resultados con Wiris.

$$A(x) = -3x^6 + 5x^4 - x^3 + 4x^2 - 7x + 2$$

$$B(x) = 4x^6 + 2x^5 - 6x^4 + 4x^2 + 2x - 2$$

$$C(x) = -2x^5 + 3x^4 - 4x^3 - x^2 - 5x - 3$$

a. $A(x) + B(x) = -3x^6 + 5x^4 - x^3 + 4x^2 - 7x + 2 + 4x^6 + 2x^5 - 6x^4 + 4x^2 + 2x - 2 =$
 $= x^6 + 2x^5 - x^4 - x^3 + 8x^2 - 5x$

b. $A(x) + C(x) = -3x^6 + 5x^4 - x^3 + 4x^2 - 7x + 2 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 - x^2 - 5x - 3 =$
 $= -3x^6 - 2x^5 + 8x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 12x - 1$

$$\begin{aligned}\text{c. } B(x) + C(x) &= 4x^6 + 2x^5 - 6x^4 + 4x^2 + 2x - 2 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 - x^2 - 5x - 3 = \\ &= 4x^6 - 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 3x - 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d. } A(x) - B(x) &= -3x^6 + 5x^4 - x^3 + 4x^2 - 7x + 2 - 4x^6 - 2x^5 + 6x^4 - 4x^2 - 2x + 2 = \\ &= -7x^6 - 2x^5 + 11x^4 - x^3 - 9x + 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{e. } A(x) - C(x) &= -3x^6 + 5x^4 - x^3 + 4x^2 - 7x + 2 + 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 + x^2 + 5x + 3 = \\ &= -3x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 2x + 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{f. } A(x) - B(x) + C(x) &= -3x^6 + 5x^4 - x^3 + 4x^2 - 7x + 2 - 4x^6 - 2x^5 + 6x^4 - 4x^2 - 2x + \\ &\quad + 2 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 - x^2 - 5x - 3 = \\ &= -7x^6 - 4x^5 + 14x^4 - 5x^3 - x^2 - 14x + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{g. } A(x) - B(x) - C(x) &= -3x^6 + 5x^4 - x^3 + 4x^2 - 7x + 2 - 4x^6 - 2x^5 + 6x^4 - 4x^2 - 2x + \\ &\quad + 2 + 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 + x^2 + 5x + 3 = \\ &= -7x^6 + 8x^4 + 3x^3 + x^2 - 4x + 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{h. } B(x) - [C(x) - A(x)] &= B(x) - [C(x) - A(x)] = B(x) - C(x) + A(x) = \\ &= 4x^6 + 2x^5 - 6x^4 + 4x^2 + 2x - 2 + 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 + x^2 + \\ &\quad + 5x + 3 - 3x^6 + 5x^4 - x^3 + 4x^2 - 7x + 2 = \\ &= x^6 + 4x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 3\end{aligned}$$

$A(x) = -3x^6 + 5x^4 - x^3 + 4x^2 - 7x + 2$
$B(x) = 4x^6 + 2x^5 - 6x^4 + 4x^2 + 2x - 2$
$C(x) = -2x^5 + 3x^4 - 4x^3 - x^2 - 5x - 3$
$A(x) + B(x) \rightarrow x^6 + 2 \cdot x^5 - x^4 - x^3 + 8 \cdot x^2 - 5 \cdot x$
$A(x) + C(x) \rightarrow -3 \cdot x^6 - 2 \cdot x^5 + 8 \cdot x^4 - 5 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x - 1$
$B(x) + C(x) \rightarrow 4 \cdot x^6 - 3 \cdot x^4 - 4 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - 3 \cdot x - 5$
$A(x) - B(x) \rightarrow -7 \cdot x^6 - 2 \cdot x^5 + 11 \cdot x^4 - x^3 - 9 \cdot x + 4$
$A(x) - C(x) \rightarrow -3 \cdot x^6 + 2 \cdot x^5 + 2 \cdot x^4 + 3 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 5$
$A(x) - B(x) + C(x) \rightarrow -7 \cdot x^6 - 4 \cdot x^5 + 14 \cdot x^4 - 5 \cdot x^3 - x^2 - 14 \cdot x + 1$
$A(x) - B(x) - C(x) \rightarrow -7 \cdot x^6 + 8 \cdot x^4 + 3 \cdot x^3 + x^2 - 4 \cdot x + 7$
$B(x) - C(x) + A(x) \rightarrow x^6 + 4 \cdot x^5 - 4 \cdot x^4 + 3 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 + 3$

11 Realiza estas sumas y restas de polinomios:

$$\begin{aligned}\text{a. } (x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x + 4) - (3x^4 - x^3 + 2x^2 + 5x + 2) &= \\ &= x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x + 4 - 3x^4 + x^3 - 2x^2 - 5x - 2 = x^5 - 6x^4 + x^3 - 6x + 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b. } (-2x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 7x - 3) + (x^4 - 4x^3 - x^2 + 6x - 8) &= \\ &= -2x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 7x - 3 + x^4 - 4x^3 - x^2 + 6x - 8 = -x^4 + 4x^2 - x - 11\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c. } (2,4x^3 - 3,1x^2 + 3x + 5,2) + (4,6x^4 - 2,3x^3 - 3,9x^2 - 6x) &= \\ &= 2,4x^3 - 3,1x^2 + 3x + 5,2 + 4,6x^4 - 2,3x^3 - 3,9x^2 - 6x = \\ &= 4,6x^4 + 0,1x^3 - 7x^2 - 3x + 5,2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } (3x^2y^3 - xy^2 + 2xy - x + 2y) + (-3xy^2 - 3x + 5x^2y^3 - 6y) &= \\ &= 3x^2y^3 - xy^2 + 2xy - x + 2y - 3xy^2 - 3x + 5x^2y^3 - 6y = \\ &= 8x^2y^3 - 4xy^2 + 2xy - 4x - 4y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e. } (4a^2b^2 - 5a^2b + a^3b - ab) - (3a^2b^2 + a^2b - 2ab + 3a^2) &= \\ &= 4a^2b^2 - 5a^2b + a^3b - ab - 3a^2b^2 - a^2b + 2ab - 3a^2 = \\ &= a^2b^2 - 6a^2b + a^3b + ab - 3a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f. } (-a^3 - 3b - a + 3b^2) - (2a^4 - 5b^3 + a^3 - b + a) &= \\ &= -a^3 - 3b - a + 3b^2 - 2a^4 + 5b^3 - a^3 + b - a = \\ &= -2a^4 - 2a^3 - 2a + 5b^3 + 3b^2 - 2b \end{aligned}$$

12 Reduce al máximo estas operaciones de polinomios:

$$\begin{aligned} (3x^2 + 4x - 2) + (x^3 - 6x^2 - x) + (4x^3 - 2x - 1) - (3x^2 + 3) + (-x + 6) - (-4x^3 - 3x^2) &= \\ = 3x^2 + 4x - 2 + x^3 - 6x^2 - x + 4x^3 - 2x - 1 - 3x^2 - 3 - x + 6 + 4x^3 + 3x^2 &= 9x^3 - 3x^2 \end{aligned}$$

13 Realiza estas sumas y restas de polinomios y simplifica:

$$\begin{aligned} \text{a. } \left(-2x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 5\right) + \left(2x^4 - x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x\right) &= \\ = -2x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 5 + 2x^4 - x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x &= -\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \left(2x^4 - x^2 - \frac{2}{5}x + 3\right) + \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{3}x - 4\right) &= \\ = 2x^4 - x^2 - \frac{2}{5}x + 3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{3}x - 4 &= \frac{9}{4}x^4 - \frac{4}{5}x^2 - \frac{1}{15}x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \left(-\frac{2}{5}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + 2\right) - \left(x^3 + \frac{2}{5}x - \frac{1}{3}\right) &= \\ = -\frac{2}{5}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + 2 - x^3 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{3} &= -\frac{7}{5}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } \left(\frac{3x^3}{7} + \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2}\right) - \left(-\frac{4x^3}{7} - \frac{5x^2}{4} + \frac{x}{8}\right) &= \\ = \frac{3x^3}{7} + \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} + \frac{4x^3}{7} + \frac{5x^2}{4} - \frac{x}{8} &= x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{8}x \end{aligned}$$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

14 Dados los polinomios $A(x) = 4x^2 - 7x + 2$, $B(x) = 3x^2 - x + 5$ y $C(x) = -2x^3 + 3x$, calcula:

$$\begin{aligned} \text{a. } A(x) \cdot B(x) &= (4x^2 - 7x + 2) \cdot (3x^2 - x + 5) = 12x^4 - 4x^3 + 20x^2 - 21x^3 + 7x^2 - \\ &- 35x + 6x^2 - 2x + 10 = 12x^4 - 25x^3 + 33x^2 - 37x + 10 \end{aligned}$$

$$\text{b. } B(x) \cdot C(x) = (3x^2 - x + 5) \cdot (-2x^3 + 3x) = -6x^5 + 9x^3 + 2x^4 - 3x^2 - 10x^3 + 15x = \\ = -6x^5 + 2x^4 - x^3 - 3x^2 + 15x$$

$$\text{c. } A(x) \cdot B(x) \cdot C(x) = (4x^2 - 7x + 2) \cdot (3x^2 - x + 5) \cdot (-2x^3 + 3x) = \\ = (12x^4 - 25x^3 + 33x^2 - 37x + 10) \cdot (-2x^3 + 3x) = \\ = -24x^7 + 50x^6 - 66x^5 + 74x^4 - 20x^3 + 36x^5 - 75x^4 \\ + 99x^3 - 111x^2 + 30x = \\ = -24x^7 + 50x^6 - 30x^5 - x^4 + 79x^3 - 111x^2 + 30x$$

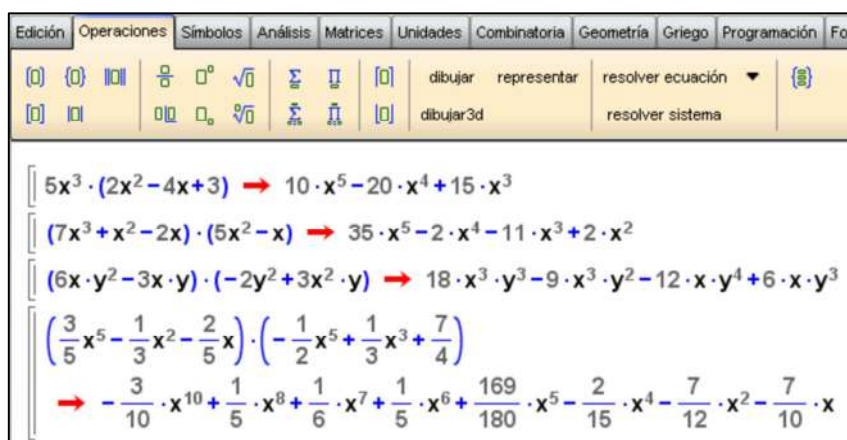
15 Realiza estos productos de polinomios. Comprueba tus resultados con Wiris.

$$\text{a. } 5x^3 \cdot (2x^2 - 4x + 3) = 10x^5 - 20x^4 + 15x^3$$

$$\text{b. } (7x^3 + x^2 - 2x) \cdot (5x^2 - x) = 35x^5 - 7x^4 + 5x^4 - x^3 - 10x^3 + 2x^2 = 35x^5 - 2x^4 - 11x^3 + 2x^2$$

$$\text{c. } (6xy^2 - 3xy) \cdot (-2y^2 + 3x^2y) = -12xy^4 + 18x^3y^3 + 6xy^3 - 9x^3y^2$$

$$\text{d. } \left(\frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}x \right) \cdot \left(-\frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{4} \right) = \\ = -\frac{3}{10}x^{10} + \frac{3}{15}x^8 + \frac{21}{20}x^5 + \frac{1}{6}x^7 - \frac{1}{9}x^5 - \frac{7}{12}x^2 + \frac{2}{10}x^6 - \frac{2}{15}x^4 - \frac{14}{20}x = \\ = -\frac{3}{10}x^{10} + \frac{1}{5}x^8 + \frac{1}{6}x^7 + \frac{1}{5}x^6 + \frac{169}{180}x^5 - \frac{2}{15}x^4 - \frac{7}{12}x^2 - \frac{7}{10}x$$



16 Opera y reduce al máximo las siguientes operaciones de polinomios:

$$\text{a. } 3x^3 \cdot (4x^2 - 5x) + 2x \cdot (-4x^4 - 7x^3) - 5x^3 + x^4 = \\ = 12x^5 - 15x^4 - 8x^5 - 14x^4 - 5x^3 + x^4 = 4x^5 - 28x^4 - 5x^3$$

$$\text{b. } (x + 4) \cdot (5x - 3) - (x^2 - 1) \cdot (4x - 2) = \\ = 5x^2 - 3x + 20x - 12 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 2 = -4x^3 + 7x^2 + 21x - 14$$

$$\text{c. } 9x^2 - (5x^3 + 3x - 2) + 6x^3 + 4x^2 \cdot (x^2 - 5x - 3) = \\ = 9x^2 - 5x^3 - 3x + 2 + 6x^3 + 4x^4 - 20x^3 - 12x^2 = 4x^4 - 19x^3 - 3x^2 - 3x + 2$$

17 Sacar factor común a los polinomios propuestos.

$$\text{a. } 4x^5 - 12x^4 + 6x^3 = 2x^3 \cdot (2x^2 - 6x + 3)$$

$$\text{b. } 6xy^3 + 12x^4y^2 - 3xy^4 = 3xy^2 \cdot (2y + 4x^3 - y^2)$$

$$\text{c. } -3a^2b^3 + 2a^3b^2 - 5a^3b = a^2b \cdot (-3b^2 + 2ab - 5a)$$

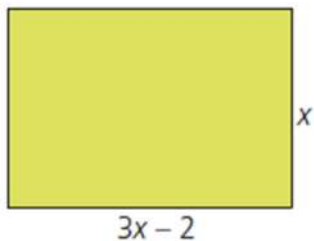
$$\text{d. } \frac{5}{6}m^4 + \frac{10}{3}m - \frac{20}{9}m^3 = \frac{5}{3}m \cdot \left(\frac{1}{2}m^3 + 2 - \frac{4}{3}m^2 \right)$$

18 Sacar factor común.

$$\text{a. } 2 \cdot (x - y) + 8 \cdot (x - y) = (2 + 8) \cdot (x - y) = 10 \cdot (x - y)$$

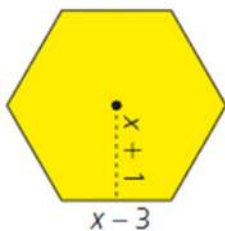
$$\text{b. } (x + 5) \cdot 4x^2 - (x + 5) \cdot 3x = (x + 5) \cdot (4x^2 - 3x) = (x + 5) \cdot (4x - 3) \cdot x$$

$$\begin{aligned} \text{c. } (3a - b) \cdot (4a - 2b) + (6a - 5b) \cdot (4a - 2b) &= (3a - b + 6a - 5b) \cdot (4a - 2b) = \\ &= (9a - 6b) \cdot (4a - 2b) = 6 \cdot (3a - 2b) \cdot (2a - b) \end{aligned}$$

19 Calcular el perímetro y el área de los siguientes polígonos:**a.**

$$\text{Perímetro: } 3x - 2 + 3x - 2 + x + x = 8x - 4$$

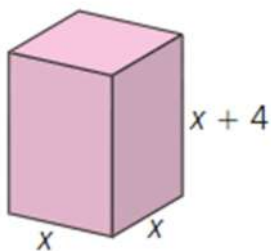
$$\text{Área: } (3x - 2) \cdot x = 3x^2 - 2x$$

b.

$$\text{Perímetro: } 6 \cdot (x - 3) = 6x - 18$$

$$\text{Área: } 6 \cdot \frac{(x - 3) \cdot (x + 1)}{2} = 3 \cdot (x - 3) \cdot (x + 1) = 3 \cdot (x^2 - 2x - 3) = 3x^2 - 6x - 9$$

20 Halla el área y el volumen del siguiente prisma:



$$\text{Área: } 4 \cdot (x + 4) \cdot x + 2 \cdot x \cdot x = 4x^2 + 16x + 2x^2 = 6x^2 + 16x$$

$$\text{Volumen: } x \cdot x \cdot (x + 4) = x^3 + 4x^2$$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

21 Realiza las divisiones propuestas y haz la prueba para comprobar la solución.

a. $(2x^4 + 7x^3 - 5x + 17) : (x + 3)$

$$\begin{array}{r}
 2x^4 + 7x^3 \quad | \quad (x + 3) \\
 \underline{-2x^4 - 6x^3} \\
 x^3 \\
 \underline{-x^3 - 3x^2} \\
 -3x^2 - 5x \\
 \underline{+3x^2 + 9x} \\
 4x + 17 \\
 \underline{-4x - 12} \\
 5
 \end{array}$$

$$(x + 3) \cdot (2x^3 + x^2 - 3x + 4) + 5 = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x + 6x^3 + 3x^2 - 9x + 12 + 5 = 2x^4 + 7x^3 - 5x + 17$$

b. $(24x^3 - 26x^2 + 18x - 4) : (6x - 2)$

$$\begin{array}{r}
 24x^3 - 26x^2 + 18x - 4 \quad | \quad (6x - 2) \\
 \underline{-24x^3 + 8x^2} \\
 -18x^2 + 18x \\
 \underline{18x^2 - 6x} \\
 12x - 4 \\
 \underline{-12x + 4} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (6x - 2) \cdot (4x^2 - 3x + 2) &= 24x^3 - 18x^2 + 12x - 8x^2 + 6x - 4 = \\
 &= 24x^3 - 26x^2 + 18x - 4
 \end{aligned}$$

c. $(-3x^6 - 9x^4 - x^3 + 34x^2 - 5x + 20) : (x^2 + 5)$

$$\begin{array}{r}
 -3x^6 \quad -9x^4 - x^3 + 34x^2 - 5x + 20 \quad | \quad (x^2 + 5) \\
 +3x^6 \quad +15x^4 \quad \quad \quad -3x^4 + 6x^2 - x + 4 \\
 \hline
 \quad \quad 6x^4 - x^3 \\
 \quad \quad -6x^4 \quad -30x^2 \\
 \quad \quad \quad -x^3 + 4x^2 \\
 \quad \quad \quad \quad x^3 \quad + 5x \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 4x^2 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad -4x^2 \quad -20 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (x^2 + 5) \cdot (-3x^4 + 6x^2 - x + 4) &= -3x^6 + 6x^4 - x^3 + 4x^2 - 15x^4 + 30x^2 - 5x + 20 = \\
 &= -3x^6 - 9x^4 - x^3 + 34x^2 - 5x + 20
 \end{aligned}$$

d. $(3x^3 + 23x^2 + 13x - 10) : (3x^2 + 2x - 1)$

$$\begin{array}{r}
 3x^3 + 23x^2 + 13x - 10 \quad | \quad 3x^2 + 2x - 1 \\
 -3x^3 - 2x^2 + \quad x \quad \quad x + 7 \\
 \hline
 \quad \quad 21x^2 + 14x - 10 \\
 \quad \quad -21x^2 - 14x + 7 \\
 \hline
 \quad \quad \quad -3
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (3x^2 + 2x - 1) \cdot (x + 7) - 3 &= 3x^3 + 21x^2 + 2x^2 + 14x - x - 7 - 3 = \\
 &= 3x^3 + 23x^2 + 13x - 10
 \end{aligned}$$

22 Indica si estas divisiones son exactas o enteras:

a. $(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) : (x + 1)$

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \quad | \quad x + 1 \\
 -x^3 - \quad x^2 \quad \quad \quad x^2 + x + 1 \\
 \hline
 \quad \quad x^2 + 2x \\
 \quad \quad -x^2 - \quad x \\
 \hline
 \quad \quad \quad x + 1 \\
 \quad \quad \quad -x - 1 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

Es una división exacta.

b. $(x^5 - 2x^3 - 8x) : (x^2 - 4)$

$$\begin{array}{r}
 x^5 \quad \quad -2x^3 - 8x \quad | \quad x^2 - 4 \\
 -x^5 \quad \quad +4x^3 \quad \quad x^3 + 2x \\
 \hline
 \quad \quad \quad 2x^3 - 8x \\
 \quad \quad \quad -2x^3 + 8x \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

$0 \Rightarrow$ Es una división exacta.

c. $(-6x^4 + 26x^3 + 5x^2 - 24x - 9) : (2x^2 - 8x - 3)$

$$\begin{array}{r}
 -6x^4 + 26x^3 + 5x^2 - 24x - 9 \quad | \quad 2x^2 - 8x - 3 \\
 \underline{6x^4 - 24x^3 - 9x^2} \quad -3x^2 + x + 2 \\
 2x^3 - 4x^2 - 24x \\
 \underline{-2x^3 + 8x^2 + 3x} \quad 4x^2 - 21x - 9 \\
 \underline{-4x^2 + 16x + 6} \quad -5x - 3
 \end{array}$$

Es una división entera.

- 23 Sabiendo que en una división el dividendo es $D(x) = 12x^5 + 23x^4 + 10x^3 - 18x^2 - 6x - 1$; el divisor, $d(x) = 3x^2 + 2x$, y el cociente, $c(x) = 4x^3 + 5x^2 - 6$, halla el resto sin efectuar la división.**

$$D(x) = d(x) \cdot c(x) + r(x) \Rightarrow r(x) = D(x) - d(x) \cdot c(x)$$

$$\begin{aligned}
 &12x^5 + 23x^4 + 10x^3 - 18x^2 - 6x - 1 - (3x^2 + 2x) \cdot (4x^3 + 5x^2 - 6) = \\
 &= 12x^5 + 23x^4 + 10x^3 - 18x^2 - 6x - 1 - 12x^5 - 15x^4 + 18x^2 - 8x^4 - 10x^3 + 12x = \\
 &= -6x - 1 \Rightarrow r(x) = -6x - 1
 \end{aligned}$$

- 24 Dados los polinomios $A(x) = -10x^4 + 27x^3 - 24x^2 + 11x$ y $B(x) = 2x^2 - 3x$, ¿es $A(x)$ múltiplo de $B(x)$? Justifícalo.**

$$\begin{array}{r}
 -10x^4 + 27x^3 - 24x^2 + 11x \quad | \quad 2x^2 - 3x \\
 \underline{10x^4 - 15x^3} \quad -5x^2 + 6x - 3 \\
 12x^3 - 24x^2 \\
 \underline{-12x^3 + 18x^2} \quad -6x^2 + 11x \\
 6x^2 - 9x \\
 \underline{} \quad 2x
 \end{array}$$

No es exacta, ya que el resto es distinto de 0, es $2x$.

25 Actividad resuelta.

26 Halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones. Comprueba tus resultados con Wiris.

a. $(10x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 2x - 6) : (5x^3 - 3x^2 + 3)$

$$\begin{array}{r}
 10x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 2x - 6 \quad | \quad 5x^3 - 3x^2 + 3 \\
 \hline
 -10x^4 + 6x^3 \qquad - 6x \qquad 2x + \frac{11}{5} \\
 \hline
 11x^3 - 3x^2 - 4x - 6 \\
 - 11x^3 + \frac{33}{5}x^2 \quad - \frac{33}{5} \\
 \hline
 \frac{18}{5}x^2 - 4x - \frac{63}{5}
 \end{array}$$

b. $(2x^3 - 7x^2 - 2x + 1) : (3x^2 - 4)$

$$\begin{array}{r}
 2x^3 - 7x^2 - 2x + 1 \quad | \quad 3x^2 - 4 \\
 \hline
 -2x^3 \qquad + \frac{8}{3}x \qquad \frac{2}{3}x - \frac{7}{3} \\
 \hline
 -7x^2 + \frac{2}{3}x + 1 \\
 7x^2 \qquad - \frac{28}{3} \\
 \hline
 \frac{2}{3}x - \frac{25}{3}
 \end{array}$$

c. $(2x^4 + 3x^2 - 6x + 1) : (2x + 1)$

$$\begin{array}{r}
 2x^4 \qquad + 3x^2 - 6x + 1 \quad | \quad 2x + 1 \\
 \hline
 -2x^4 - x^3 \qquad \qquad \qquad x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{31}{8} \\
 \hline
 -x^3 + 3x^2 \\
 x^3 + \frac{1}{2}x^2 \\
 \hline
 \frac{7}{2}x^2 - 6x \\
 -\frac{7}{2}x^2 - \frac{7}{4}x \\
 \hline
 -\frac{31}{4}x + 1 \\
 \frac{31}{4}x + \frac{31}{8} \\
 \hline
 \frac{39}{8}
 \end{array}$$

- 28 Halla el valor de a para sea exacta la siguiente división:
 $(2x^4 + 3x^2 - 6x + a) : (x - 2)$

2	2	0	3	-6	a
2		4	8	22	32
	2	4	11	16	32 + a

Como $32 + a = 0 \Rightarrow a = -32$

- 29 Encuentra el valor de m para que el resto de la división
 $(-4x^3 - 19x^2 + mx - 15) : (x + 5)$ sea 10.

	-4	-19	m	-15
-5		20	-5	-5m + 25
	-4	1	m - 5	-5m + 10

Como $-5m + 10 = 10 \Rightarrow m = 0$

- 30 Copia en tu cuaderno y encuentra el valor de las letras para que la siguiente división, realizada mediante la regla de Ruffini, sea correcta. Escribe el cociente y el resto.

	-4	6	B	3	C
A		D	2	E	4
	-4	F	G	4	9

Como $C + 4 = 9 \Rightarrow C = 5$

Como $A \cdot 4 = 4 \Rightarrow A = 1$

Como $3 + E = 4 \Rightarrow E = 1$

Como $A \cdot G = E \Rightarrow 1 \cdot G = 1 \Rightarrow G = 1$

Como $B + 2 = G \Rightarrow B + 2 = 1 \Rightarrow B = -1$

Como $A \cdot F = 2 \Rightarrow 1 \cdot F = 2 \Rightarrow F = 2$

Como $6 + D = F \Rightarrow 6 + D = 2 \Rightarrow D = -4$

Entonces: $A = 1$, $B = -1$, $C = 5$, $D = -4$, $E = 1$, $F = 2$, $G = 1$

- 31 Halla, utilizando la regla de Ruffini, los valores numéricos que se indican.

a. $P(4)$ para $P(x) = -3x^3 - 5x^2 + 2x + 4$

	-3	-5	2	4
4		-12	-68	-264
	-3	-17	-66	-260

b. $P(-3)$ para $P(x) = 2x^4 + 7x^3 - 6x - 1$

	2	7	0	-6	-1
-3		-6	-3	9	-9
	2	1	-3	3	-10

32 Comprueba, utilizando la regla de Ruffini, si 4 y -2 son raíces del polinomio $P(x) = -3x^3 + 2x^2 + 7x + 2$. ¿Son $(x - 4)$ y $(x + 2)$ factores del polinomio $P(x)$?

Para $x = 4$

	-3	2	7	2
4		-12	-40	-132
	-3	-10	-33	-130

Para $x = -2$

	-3	2	7	2
-2		6	-16	18
	-3	8	-9	20

Por lo tanto, al no ser raíces del polinomio, no son factores ninguno de los dos.

33 ¿Es el binomio $(x + 3)$ un factor del polinomio $P(x) = 2x^2 + 2x - 12$? Justifica tu respuesta.

	2	2	-12
-3		-6	12
	2	-4	0

Al ser el resto igual a 0, entonces el binomio $(x + 3)$ sí es factor del polinomio $P(x)$. También se podría ver que $P(-3) = 0$.

34 Halla las raíces de los siguientes polinomios sin hacer las divisiones:

a. $(x + 5) \cdot (x - 3) \cdot (x + 3)$

Las raíces son -5, 3 y -3, ya que cualquiera de estos tres números anula al polinomio.

b. $x \cdot (x + 2) \cdot (x - 4)$

Las raíces son 0, -2 y 4, ya que cualquiera de estos tres números anula al polinomio.

35 Calcula el resto de la división $(2x^5 - x^4 + 3x^2 - 5x + 6) : (x + 3)$, utilizando:

a. La división de polinomios.

$$\begin{array}{r}
 2x^5 - x^4 \bigg| x + 3 \\
 -2x^5 - 6x^4 \\
 \hline
 -7x^4 \\
 7x^4 + 21x^3 \\
 \hline
 21x^3 + 3x^2 \\
 -21x^3 - 63x^2 \\
 \hline
 -60x^2 - 5x \\
 60x^2 + 180x \\
 \hline
 175x + 6 \\
 -175x - 525 \\
 \hline
 -519
 \end{array}$$

b. La regla de Ruffini.

	2	-1	0	3	-5	6
-3		-6	21	-63	180	-525
	2	-7	21	-60	175	-519

c. El teorema del resto.

$$2 \cdot (-3)^5 - (-3)^4 + 3 \cdot (-3)^2 - 5 \cdot (-3) + 6 = -486 - 81 + 27 + 15 + 6 = -519$$

36 Aplicando el teorema del factor, escribe un polinomio que tenga tres raíces, dos de ellas 3 y -4.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$(x - 3) \cdot (x + 4) \cdot (x + 1) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12$$

En este caso, además de las dos raíces dadas, también tiene como raíz a -1

37 Utilizando el teorema del factor, escribe un polinomio cuyo coeficiente principal sea 5 y que solo tenga por raíces 2, -3 y -6.

$$5 \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) \cdot (x + 6) = 5x^3 + 35x^2 - 180$$

IDENTIDADES NOTABLES. POTENCIA DE UN POLINOMIO

38 Copia en tu cuaderno y encuentra el valor de las letras para que los productos notables sean correctos.

a. $(A + 2)^2 = 16x^2 + 16x + 4$

$$A^2 = 16x^2 \Rightarrow A = \pm 4x, \text{ pero como } 16x \text{ es positivo, entonces } A = 4x$$

b. $(A - B)^2 = x^4 - 12x^2 + 36$

$$A^2 = x^4 \Rightarrow A = \pm x^2$$

$$B^2 = 36 \Rightarrow B = \pm 6$$

Como $-12x^2$ es negativo, entonces o bien $A = x^2$ y $B = 6$ o bien $A = -x^2$ y $B = -6$

c. $(7x^2 + A) \cdot (7x^2 - B) = C - \frac{4}{9}$

Para que sea identidad notable, $A = B$. Y además $A^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow A = \frac{2}{3}$

Como $(7x^2)^2 = C \Rightarrow C = 49x^4$

39 Desarrolla las siguientes identidades notables:

a. $(x + 5)^2 = (x + 5) \cdot (x + 5) = x^2 + 5x + 5x + 25 = x^2 + 10x + 25$

b. $(x - 8)^2 = (x - 8) \cdot (x - 8) = x^2 - 8x - 8x + 64 = x^2 - 16x + 64$

**c. $(5b + 2a)^2 = (5b + 2a) \cdot (5b + 2a) = 25b^2 + 10ab + 10ab + 4a^2 =$
 $= 25b^2 + 20ab + 4a^2$**

d. $(4x - 6) \cdot (4x - 6) = 16x^2 - 24x - 24x + 36 = 16x^2 - 48x + 36$

e. $(2xy - 3x) \cdot (2xy + 3x) = 4x^2y^2 + 6x^2y - 6x^2y - 9x^2 = 4x^2y^2 - 9x^2$

f. $\left(\frac{b^2}{2} + \frac{b}{3}\right)^2 = \left(\frac{b^2}{2} + \frac{b}{3}\right) \cdot \left(\frac{b^2}{2} + \frac{b}{3}\right) = \frac{b^4}{4} + \frac{b^3}{6} + \frac{b^3}{6} + \frac{b^2}{9} = \frac{b^4}{4} + \frac{b^3}{3} + \frac{b^2}{9}$

40 Calcula las siguientes identidades notables:

a. $(3x + \sqrt{7})^2 = 9x^2 + 6\sqrt{7}x + 7$

b. $(x - \sqrt{2})^2 = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$

c. $(x + \sqrt{3}) \cdot (x - \sqrt{3}) = x^2 - 3$

d. $(\sqrt{5}a^2 + \sqrt{6}b) \cdot (\sqrt{5}a^2 - \sqrt{6}b) = 5a^4 - 6b^2$

41 Actividad resuelta.

42 Resuelve mediante las identidades notables.

a. $26^2 - 25^2 = (26 + 25) \cdot (26 - 25) = 51 \cdot 1 = 51$

b. $102^2 - 31^2 = (102 + 31) \cdot (102 - 31) = 133 \cdot 71 = 9\,443$

c. $47^2 - 16 = (47 + 4) \cdot (47 - 4) = 51 \cdot 43 = 2\,193$

- 43 Encuentra una expresión general para las potencias $(a + b)^3$ y $(a - b)^3$, análoga a la del cuadrado de la suma y de la diferencia, respectivamente. Calcula luego a partir de ellas:**

$$(a + b)^3 = (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b) =$$

$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = (a - b) \cdot (a - b) \cdot (a - b) = (a^2 - 2ab + b^2) \cdot (a - b) =$$

$$= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + b^2a - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

a. $(x + 5)^3 = (x + 5)^3 = x^3 + 3 \cdot 5x^2 + 3 \cdot 5^2x + 5^3 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$

b. $(3x^2 + 2x)^3 = (3x^2 + 2x)^3 = (3x^2)^3 + 3 \cdot (3x^2)^2 \cdot 2x + 3 \cdot 3x^2 \cdot (2x)^2 + (2x)^3 =$

$$= 27x^6 + 54x^5 + 36x^4 + 8x^3$$

c. $(2x - 1)^3 = (2x - 1)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot (-1) + 3 \cdot (2x) \cdot (-1)^2 + (-1)^3 =$

$$= 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$$

- 44 Resuelve y reduce el resultado al máximo.**

a. $(5x^2 - 4x + 1) \cdot (x + 2)^2 + (x + 3) \cdot (x - 3) =$

$$= (5x^2 - 4x + 1) \cdot (x^2 + 4x + 4) + (x^2 - 9) =$$

$$= 5x^4 + 20x^3 + 20x^2 - 4x^3 - 16x^2 - 16x + x^2 + 4x + 4 + x^2 - 9 =$$

$$= 5x^4 + 16x^3 + 6x^2 - 12x - 5$$

b. $(x - 4)^2 + (x + 4)^2 - 2 \cdot (x - 4) \cdot (x + 4) =$

$$= (x^2 - 8x + 16) + (x^2 + 8x + 16) - 2 \cdot (x^2 - 16) =$$

$$= x^2 - 8x + 16 + x^2 + 8x + 16 - 2x^2 + 32 = 64$$

c. $-3x^2 \cdot (2x - 3)^2 + 6x^2 \cdot (2x + 3)^2 =$

$$= -3x^2 \cdot (4x^2 - 12x + 9) + 6x^2 \cdot (4x^2 + 12x + 9) =$$

$$= -12x^4 + 36x^3 - 27x^2 + 24x^4 + 72x^3 + 54x^2 = 12x^4 + 108x^3 + 27x^2$$

d. $(x^2 + 5x)^2 - (3x^3 - x)^2 + 7x \cdot (4x + 2) \cdot (4x - 2) =$

$$= x^4 + 10x^3 + 25x^2 - 9x^6 + 6x^4 - x^2 + 7x \cdot (16x^2 - 4) =$$

$$= -9x^6 + 7x^4 + 122x^3 + 24x^2 - 28x$$

e. $(2x^2 + 3x - 4)^2 + (x - 1)^2 \cdot (x + 1)^2 =$

$$= (2x^2 + 3x - 4) \cdot (2x^2 + 3x - 4) + (x^2 - 2x + 1) \cdot (x^2 + 2x + 1)$$

$$= 4x^4 + 12x^3 - 7x^2 - 24x + 16 + x^4 - 2x^2 + 1 = 5x^4 + 12x^3 - 9x^2 - 24x + 17$$

- 45 Expresa los siguientes polinomios en forma de una identidad notable:**

a. $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$

b. $9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$

$$\text{c. } 25x^4 - \frac{25}{16}x^2 = \left(5x^2 + \frac{5}{4}\right) \cdot \left(5x^2 - \frac{5}{4}\right)$$

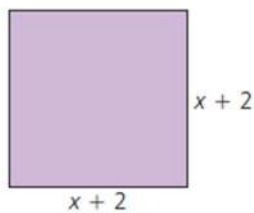
$$\text{d. } 4x^2 - 3 = (2x + \sqrt{3}) \cdot (2x - \sqrt{3})$$

$$\text{e. } \frac{1}{4}x^6 - 3x^3 + 9 = \left(\frac{1}{2}x^3 - 3\right)^2$$

$$\text{f. } \frac{4}{9}x^4 + 2x^3 + \frac{9}{4}x^2 = \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{2}x\right)^2$$

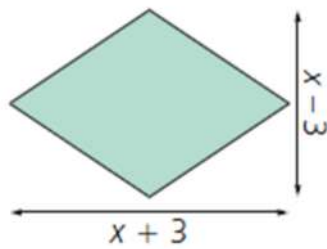
46 Halla el área de las siguientes figuras:

a.



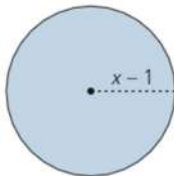
$$A = (x + 2) \cdot (x + 2) = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

b.



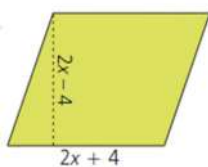
$$A = \frac{(x + 3) \cdot (x - 3)}{2} = \frac{x^2 - 9}{2}$$

c.



$$A = \pi \cdot (x - 1)^2 = \pi \cdot (x^2 - 2x + 1)$$

d.



$$A = (2x + 4) \cdot (2x - 4) = 4x^2 - 16$$

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

47 Factoriza los siguientes polinomios:

a. $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

b. $64x^3 + 48x^2 + 9x = x \cdot (64x^2 + 48x + 9) = x \cdot (8x + 3)^2$

c. $49a^2 - 4 = (7a + 2) \cdot (7a - 2)$

d. $5x^4y - 5x^2y = 5x^2y \cdot (x^2 - 1) = 5x^2y \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$

e. $3x^7 + 12x^6 + 12x^5 = 3x^5 \cdot (x^2 + 4x + 4) = 3x^5 \cdot (x + 2)^2$

f. $2x^3y - 4x^2y^2 + 2xy^3 = 2xy \cdot (x^2 - 2xy + y^2) = 2xy \cdot (x - y)^2$

48 Simplifica estas fracciones algebraicas:

a. $\frac{(x-1)^2}{(x+1) \cdot (x-1)} = \frac{(x-1)^2}{(x+1) \cdot (x-1)} = \frac{(x-1) \cdot (x-1)}{(x+1) \cdot (x-1)} = \frac{(x-1)}{(x+1)}$

b. $\frac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9} = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9} = \frac{(x+3) \cdot (x-3)}{(x+3) \cdot (x+3)} = \frac{(x-3)}{(x+3)}$

c. $\frac{3x^5 + 6x^4 + 3x^3}{3x^3 - 3x} = \frac{3x^5 + 6x^4 + 3x^3}{3x^3 - 3x} = \frac{3x^3 \cdot (x^2 + 2x + 1)}{3x \cdot (x^2 - 1)} = \frac{x^2 \cdot (x^2 + 2x + 1)}{(x^2 - 1)} =$
 $= \frac{x^2 \cdot (x+1) \cdot (x+1)}{(x+1) \cdot (x-1)} = \frac{x^2 \cdot (x+1)}{(x-1)}$

d. $\frac{16x^3y^2 - 4xy^2}{4x^2y - 2xy} = \frac{16x^3y^2 - 4xy^2}{4x^2y - 2xy} = \frac{4xy^2 \cdot (4x^2 - 1)}{2xy \cdot (2x - 1)} = \frac{2y \cdot (4x^2 - 1)}{(2x - 1)} =$
 $= \frac{2y \cdot (2x + 1) \cdot (2x - 1)}{(2x - 1)} = 2y \cdot (2x + 1)$

49 Visita esta página de Internet y realiza las actividades propuestas para repasar los conceptos de la unidad:

<http://conteni2.educarex.es/mats/11810/contenido/>

Respuesta abierta.

EVALUACIÓN

1 El valor numérico del polinomio $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 9$, en $x = -2$, es:

a. 5

b. 13

c. 0

d. 41

$$P(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 9 = -16 + 12 + 8 + 9 = 13$$

2 Sean los polinomios:

$$A(x) = -3x^5 + 2x^4 - 5x^2 + x - 1$$

$$B(x) = -3x^4 + 2x^2 - 2x + 3$$

$$C(x) = 2x^5 + x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 2$$

El resultado de la operación $A(x) + B(x) - C(x)$ es:

a. $-5x^5 - 2x^4 - 6x^3 - x + 4$

b. $-5x^5 - 2x^4 + 6x^3 - x$

c. $-5x^5 - 6x^3 - x + 4$

d. $-5x^5 - 6x^3 - 6x^2 - x$

$$A(x) + B(x) - C(x) =$$

$$= -3x^5 + 2x^4 - 5x^2 + x - 1 - 3x^4 + 2x^2 - 2x + 3 - 2x^5 - x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 2 =$$

$$= -5x^5 - 2x^4 - 6x^3 - x + 4$$

3 El resultado de la multiplicación $(3x^2 - 2x + 4) \cdot (x^3 + 5x^2 - 3)$ es:

a. $3x^6 + 13x^4 - 6x^3 + 11x^2 + 6x - 12$

b. $3x^5 + 13x^4 - 6x^3 + 11x^2 + 6x - 12$

c. $3x^6 - 13x^4 + 14x^3 - 11x^2 + 6x - 12$

d. $3x^5 - 13x^4 + 14x^3 - 11x^2 + 6x - 12$

$$(3x^2 - 2x + 4) \cdot (x^3 + 5x^2 - 3) =$$

$$= 3x^5 + 15x^4 - 9x^2 - 2x^4 - 10x^3 + 6x + 4x^3 + 20x^2 - 12 = 3x^5 + 13x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 12$$

4 ¿Cuál de las siguientes expresiones representa al polinomio $12xy^3 - 6x^2y^2 + 3xy^2$ una vez extraído el factor común?

a. $3xy^2(4y - 2x)$

b. $xy^2(12y - 6x)$

c. $xy^2(12y - 6x + 3)$

d. $3xy^2(4y - 2x + 1)$

$$12xy^3 - 6x^2y^2 + 3xy^2 = 3xy^2 \cdot (4y - 2x + 1)$$

5 Calcula el cociente y el resto de la siguiente división:

$$(-6x^4 + 17x^3 + 6x^2 - 4x + 8) : (3x^2 - 4x).$$

a. $c(x) = -2x^2 + 3x + 6$; $r(x) = 20x + 8$

b. $c(x) = -2x^2 + 3x + 6$; $r(x) = 8$

c. $c(x) = 2x^2 - 3x - 6$; $r(x) = 20x + 8$

d. $c(x) = 2x^2 - 3x - 6$; $r(x) = 8$

$$\begin{array}{r}
 -6x^4 + 17x^3 + 6x^2 - 4x + 8 \quad | \quad 3x^2 - 4x \\
 \underline{6x^4 - 8x^3} \\
 9x^3 + 6x^2 \\
 \underline{-9x^3 + 12x^2} \\
 18x^2 - 4x \\
 \underline{-18x^2 + 24x} \\
 20x + 8
 \end{array}$$

6 El resto de la división $(5x^3 - 16x^2 - x + 11) : (x - 3)$ es:

a. -5

b. 5

c. -1

d. 1

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 5 & -16 & -1 & 11 \\
 3 & & 15 & -3 & -12 \\
 \hline
 & 5 & -1 & -4 & -1
 \end{array}$$

7 El resultado de la operación $(x + 1) \cdot (x - 1) - (x - 1)^2$ es:

a. $2x$

b. 0

c. $-2x$

d. $2x - 2$

$$(x + 1) \cdot (x - 1) - (x - 1)^2 = x^2 - 1 - (x^2 - 2x + 1) = x^2 - 1 - x^2 + 2x - 1 = 2x - 2$$