Unidad 3. Sucesiones

SOLUCIONES PÁG. 65

1 Indica, para cada sucesión, cuáles son los términos a_1, a_3, a_5, a_6, a_8 y a_9.

a. {6, 4, 2, 0, –2, –4, –8, –10, –12, –14, …}

$a_1 = 6$, $a_3 = 2$, $a_5 = -2$, $a_6 = -4$, $a_8 = -10$, $a_9 = -12$

b. $\left\{\frac{1}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{7},\frac{7}{9},\frac{9}{11},\frac{11}{13},\frac{13}{15},\frac{15}{17},\frac{17}{21},\frac{21}{23},\ldots\right\}$

$b_1=\frac{1}{3},\ b_3=\frac{5}{7}, b_5=\frac{9}{11},\ b_6=\frac{11}{13},\ b_8=\frac{15}{17}, b_9=\frac{17}{21}$

2 Halla tres términos más de cada sucesión.

a. {3, 6, 9, 12, 15, …}

Cada término siguiente se obtiene sumando 3: 18, 21, 24, …

b. $\left\{4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{4},\ldots\right\}$

Cada término siguiente se obtiene dividiendo entre 2: $\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\ldots$

c. {18, 13, 8, 3, –2, …}

Ca término siguiente se obtiene restando 5: –7, –12, –17, …

d. {1, 3, 9, 27, 81, …}

Cada término siguiente se obtiene multiplicando por 3: 243, 729, 2 187, …

3 Actividad resuelta.

4 Halla los cinco primeros términos de cada sucesión y averigua en cada caso cuál es el término que ocupa la posición 20:

a. $a_n = 2n^2 - n - 3$

$a_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 - 3 = -2$ $a_2 = 2 \cdot 2^2 - 2 - 3 = 3$

$a_3 = 2 \cdot 3^2 - 3 - 3 = 12$ $a_4 = 2 \cdot 4^2 - 4 - 3 = 25$

$a_5 = 2 \cdot 5^2 - 5 - 3 = 42$ $a_{20} = 2 \cdot 20^2 - 20 - 3 = 777$

b. $b_n = (-1)^n$

$b_1 = (-1)^1 = -1$ $b_2 = (-1)^2 = 1$

$b_3 = (-1)^3 = -1$ $b_4 = (-1)^4 = 1$

$b_5 = (-1)^5 = -1$ $b_{20} = (-1)^{20} = 1$

c. $\mathbf{c_n = \frac{(-1)^n}{n}}$

$c_1 = \frac{(-1)^1}{1} = -1$ $\qquad$ $c_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$

$c_3 = \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{3}$ $\qquad$ $c_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}$

$c_5 = \frac{(-1)^5}{5} = -\frac{1}{5}$ $\qquad$ $c_{20} = \frac{(-1)^{20}}{20} = \frac{1}{20}$

d. $\mathbf{d_n = \frac{n+2}{n^2}}$

$d_1 = \frac{1+2}{1^2} = 3$ $\qquad$ $d_2 = \frac{2+2}{2^2} = 1$

$d_3 = \frac{3+2}{3^2} = \frac{5}{9}$ $\qquad$ $d_4 = \frac{4+2}{4^2} = \frac{3}{8}$

$d_5 = \frac{5+2}{5^2} = \frac{7}{25}$ $\qquad$ $d_{20} = \frac{20+2}{20^2} = \frac{11}{200}$

e. $\mathbf{e_n = (n-3)^2}$

$e_1 = (1 - 3)^2 = 4$ $\qquad$ $e_2 = (2 - 3)^2 = 1$

$e_3 = (3 - 3)^2 = 0$ $\qquad$ $e_4 = (4 - 3)^2 = 1$

$e_5 = (5 - 3)^2 = 4$ $\qquad$ $e_{20} = (20 - 3)^2 = 289$

f. $\mathbf{f_n = (-2)^n}$

$f_1 = (-2)^1 = -2$ $\qquad$ $f_2 = (-2)^2 = 4$

$f_3 = (-2)^3 = -8$ $\qquad$ $f_4 = (-2)^4 = 16$

$f_5 = (-2)^5 = -32$ $\qquad$ $f_{20} = (-2)^{20} = 1\,048\,576$

5 Copia en tu cuaderno y relaciona cada sucesión con su término general.

2, 10, 18, 26, …	$a_n = 10n$
10, 20, 30, 40, …	$b_n = 5n + 5$
1, 2, 4, 8, …	$c_n = 8n - 6$
2, 8, 18, 32, …	$d_n = 2^{n-1}$
10, 15, 20, 25, …	$e_n = 2n^2$

$$a_n = 10n \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 10 \cdot 1 = 10 \\ a_2 = 10 \cdot 2 = 20 \\ a_3 = 10 \cdot 3 = 30 \\ a_4 = 10 \cdot 4 = 40 \end{cases} \Rightarrow a_n = \{10,\ 20,\ 30,\ 40,\ \ldots\}$$

$$b_n = 5n + 5 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 5 \cdot 1 + 5 = 10 \\ b_2 = 5 \cdot 2 + 5 = 15 \\ b_3 = 5 \cdot 3 + 5 = 20 \\ b_4 = 5 \cdot 4 + 5 = 25 \end{cases} \Rightarrow b_n = \{10,\ 15,\ 20,\ 25,\ \ldots\}$$

$$c_n = 2^{n-1} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2^{1-1} = 1 \\ c_2 = 2^{2-1} = 2 \\ c_3 = 2^{3-1} = 4 \\ c_4 = 2^{4-1} = 8 \end{cases} \Rightarrow b_n = \{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \ldots\}$$

$$d_n = 2n^2 \Rightarrow \begin{cases} d_1 = 2 \cdot 1^2 = 2 \\ d_2 = 2 \cdot 2^2 = 8 \\ d_3 = 2 \cdot 3^2 = 18 \\ d_4 = 2 \cdot 4^2 = 32 \end{cases} \Rightarrow b_n = \{2, 8,\ 18,\ 32,\ \ldots\}$$

$$e_n = 8n - 6 \Rightarrow \begin{cases} e_1 = 8 \cdot 1 - 6 = 2 \\ e_2 = 8 \cdot 2 - 6 = 10 \\ e_3 = 8 \cdot 3 - 6 = 18 \\ e_4 = 8 \cdot 4 - 6 = 26 \end{cases} \Rightarrow b_n = \{2, 10,\ 18,\ 26,\ \ldots\}$$

6 Encuentra el término general de las siguientes sucesiones:

a. {2, 4, 8, 16, …}

Se observa que los términos de la sucesión son potencias de base 2. Por tanto:

$a_n = 2^n$

b. $\left\{\mathbf{\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}, \ldots}\right\}$

Comparando los términos de la sucesión b_n con los de a_n, se observa que estos se encuentran en el denominador, mientras que el numerador es constante, 5. Así, el termino general es: $b_n = \frac{5}{2^n}$

c. {–2, –4, –8, –16, …}

Los términos de c_n son los mismos que los de a_n pero con signo negativo. Por tanto, $c_n = -2^n$

d. {0, 2, 6, 14, …}

Al comparar los términos de d_n con los de a_n se observa que son los mismos pero disminuidos en 2 unidades. Así, $d_n = 2^n - 2$

e. $\left\{2, \frac{4}{3}, \frac{8}{5}, \frac{16}{7}, \ldots\right\}$

Los términos de la sucesión e_n están formados fracciones cuyo numerador son los términos de a_n y cuyo denominador son los números impares. Por lo tanto, $e_n = \frac{2^n}{2n-1}$

f. {20, 40, 80, 160, …}

En este caso, los términos de la sucesión f_n son los de a_n multiplicados por 10. Así, $f_n = 2^n \cdot 10$

7 Analiza las siguientes sucesiones e indica cuáles son sus términos generales. En cada caso, explica cómo lo has obtenido y compara el método que has empleado con el de tu compañero.

a. {11, 13, 15, 17, …}

$a_n = 2n + 9$. Se va sumando de 2 en 2, empezando en el término 11, por eso hay que añadir +9.

b. {–1, –3, –5, –7, …}

$b_n = -2n + 1$. Se va restando de 2 en 2, empezando en el término –1, por eso hay que añadir + 1.

c. {10, 12, 14, 16, …}

$c_n = 2n + 8$. Se va sumando de 2 en 2, empezando en el término 10, por eso hay que añadir +8.

d. {–2, –4, –6, –8, …}

$d_n = -2n$. Se va restando de 2 en 2, empezando en el término –2, por lo que no hay que añadir nada más.

8 Actividad resuelta.

9 Los dos primeros términos de una sucesión son 2 y 3; si los siguientes términos se obtienen calculando la diferencia de los dos que les anteceden en el mismo orden en el que aparecen:

a. Halla los seis primeros términos de la sucesión.

$a_1 = 2$	$a_2 = 3$
$a_3 = 2 - 3 = -1$	$a_4 = 3 - (-1) = 4$
$a_5 = -1 - 4 = -5$	$a_6 = 4 - (-5) = 9$

b. Determina una fórmula para la ley de recurrencia.

$a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$; $a_1 = 2$; $a_2 = 3$

10 Calcula, en cada caso, los cinco primeros términos:

a. $\mathbf{a_n = 2a_{n-2} + a_{n-1}; a_1 = 3; a_2 = 1}$

$a_1 = 3$

$a_2 = 1$

$a_3 = 2 \cdot a_{3-2} + a_{3-1} = 2 \cdot a_1 + a_2 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

$a_4 = 2 \cdot a_{4-2} + a_{4-1} = 2 \cdot a_2 + a_3 = 2 \cdot 1 + 7 = 9$

$a_5 = 2 \cdot a_{5-2} + a_{5-1} = 2 \cdot a_3 + a_4 = 2 \cdot 7 + 9 = 23$

b. $\mathbf{b_n = b_{n-2} - 2b_{n-1}; b_1 = 1; b_2 = -1}$

$b_1 = 1$

$b_2 = -1$

$b_3 = b_{3-2} - 2 \cdot b_{3-1} = b_1 - 2 \cdot b_2 = 1 - 2 \cdot (-1) = 1 + 2 = 3$

$b_4 = b_{4-2} - 2 \cdot b_{4-1} = b_2 - 2 \cdot b_3 = -1 - 2 \cdot 3 = -1 - 6 = -7$

$b_5 = b_{5-2} - 2 \cdot b_{5-1} = b_3 - 2 \cdot b_4 = 3 - 2 \cdot (-7) = 3 + 14 = 17$

c. $\mathbf{c_n = \frac{c_{n-2}}{c_{n-1}}; c_1 = 3; c_2 = 1}$

$c_1 = 3$

$c_2 = 1$

$$c_3 = \frac{c_{3-2}}{c_{3-1}} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{3}{1} = 3$$

$$c_4 = \frac{c_{4-2}}{c_{4-1}} = \frac{c_2}{c_3} = \frac{1}{3}$$

$$c_5 = \frac{c_{5-2}}{c_{5-1}} = \frac{c_3}{c_4} = \frac{3}{\frac{1}{3}} = 9$$

SOLUCIONES PÁG. 67

11 Averigua si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas o no:

En una progresión aritmética cada término se calcula sumando una cantidad fija al término anterior. Esta cantidad fija es la diferencia.

a. {21, 24, 27, 30, 33, …}

$24 - 21 = 27 - 24 = 30 - 27 = 33 - 30 = 3 \Rightarrow d = 3$

Sí es una progresión aritmética porque cada término se obtiene sumando 3 al anterior.

b. {6, 7, 4, 5, 2, 3, 0, …}

$7 - 6 \neq 4 - 7$

No es una progresión aritmética porque cada término no se obtiene sumando o restando al término anterior una cantidad fija.

c. {–4, –1, 2, 5, 8, 11, …}

$-1 - (-4) = 2 - (-1) = 5 - 2 = 8 - 5 = 11 - 8 = 3 \Rightarrow d = 3$

Sí es una progresión aritmética porque cada término se obtiene sumando 3 al anterior.

d. {2, 4, 8, 16, 32, 64, …}

$4 - 2 \neq 8 - 4$

No es una progresión aritmética porque cada término no se obtiene sumando o restando al término anterior una cantidad fija.

12 Escribe los diez primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas mediante la ley de recurrencia:

La ley de recurrencia para una progresión aritmética es: $a_n = a_{n-1} + d$

a. $a_1 = 4$; d = 5

$a_1 = 4$

$a_2 = a_1 + d = 4 + 5 = 9$

$a_3 = a_2 + d = 9 + 5 = 14$

$a_4 = a_3 + d = 14 + 5 = 19$

$a_5 = a_4 + d = 19 + 5 = 24$

$a_6 = a_5 + d = 24 + 5 = 29$

$a_7 = a_6 + d = 29 + 5 = 34$

$a_8 = a_7 + d = 34 + 5 = 39$

$a_9 = a_8 + d = 39 + 5 = 44$

$a_{10} = a_9 + d = 41 + 5 = 49$

b. $b_1 = -5$, d = 3

$b_1 = -5$

$b_2 = b_1 + d = -5 + 3 = -2$

$b_3 = b_2 + d = -2 + 3 = 1$

$b_4 = b_3 + d = 1 + 3 = 4$

$b_5 = b_4 + d = 4 + 3 = 7$

$b_6 = b_5 + d = 7 + 3 = 10$

$b_7 = b_6 + d = 10 + 3 = 13$

$b_8 = b_7 + d = 13 + 3 = 16$

$b_9 = b_8 + d = 16 + 3 = 19$

$b_{10} = b_9 + d = 19 + 3 = 22$

c. $c_1 = 12$; d = –4

$c_1 = 12$

$c_2 = c_1 + d = 12 - 4 = 8$

$c_3 = c_2 + d = 8 - 4 = 4$

$c_4 = c_3 + d = 4 - 4 = 0$

$c_5 = c_4 + d = 0 - 4 = -4$

$c_6 = c_5 + d = -4 - 4 = -8$

$c_7 = c_6 + d = -8 - 4 = -12$

$c_8 = c_7 + d = -12 - 4 = -16$

$c_9 = c_8 + d = -16 - 4 = -20$

$c_{10} = c_9 + d = -20 - 4 = -24$

d. $d_1 = –1$; $d = –2$

$d_1 = –1$

$d_2 = d_1 + d = –1 – 2 = –3$

$d_3 = d_2 + d = –3 – 2 = –5$

$d_4 = d_3 + d = –5 – 2 = –7$

$d_5 = d_4 + d = –7 – 2 = –9$

$d_6 = d_5 + d = –9 – 2 = –11$

$d_7 = d_6 + d = –11 – 2 = –13$

$d_8 = d_7 + d = –13 – 2 = –15$

$d_9 = d_8 + d = –15 – 2 = –17$

$d_{10} = d_9 + d = –17 – 2 = –19$

e. $e_1 = 20$; $d = 10$

$e_1 = 20$

$e_2 = e_1 + d = 20 + 10 = 30$

$e_3 = e_2 + d = 30 + 10 = 40$

$e_4 = e_3 + d = 40 + 10 = 50$

$e_5 = e_4 + d = 50 + 10 = 60$

$e_6 = e_5 + d = 60 + 10 = 70$

$e_7 = e_6 + d = 70 + 10 = 80$

$e_8 = e_7 + d = 80 + 10 = 90$

$e_9 = e_8 + d = 90 + 10 = 100$

$e_{10} = e_9 + d = 100 + 10 = 110$

f. $f_1 = –9$; $d = –3$

$f_1 = –9$

$f_2 = f_1 + d = –9 – 3 = –12$

$f_3 = f_2 + d = –12 – 3 = –15$

$f_4 = f_3 + d = –15 – 3 = –18$

$f_5 = f_4 + d = –18 – 3 = –21$

$f_6 = f_5 + d = –21 – 3 = –24$

$f_7 = f_6 + d = –24 – 3 = –27$

$f_8 = f_7 + d = –27 – 3 = –30$

$f_9 = f_8 + d = –30 – 3 = –33$

$f_{10} = f_9 + d = –33 – 3 = –36$

13 Halla los términos generales de las progresiones aritméticas de la actividad anterior y úsalos para calcular los términos que ocupan la vigésima posición.

a. $a_n = 4 + (n – 1) \cdot 5 = 4 + 5n – 5 = 5n – 1$, $a_{20} = 5 \cdot 20 – 1 = 99$

b. $b_n = –5 + (n – 1) \cdot 3 = –5 + 3n – 3 = 3n – 8$, $b_{20} = 3 \cdot 20 – 8 = 52$

c. $c_n = 12 + (n – 1) \cdot (–4) = 12 – 4n + 4 = –4n + 16$, $c_{20} = –4 \cdot 20 + 16 = –64$

d. $d_n= –1 + (n – 1) \cdot (–2) = –1 – 2n + 2 = –2n + 1$, $d_{20} = –2 \cdot 20 + 1 = –39$

e. $e_n = 20 + (n – 1) \cdot 10 = 20 + 10n – 10 = 10n + 10$, $e_{20} = 10 \cdot 20 + 10 = 210$

f. $f_n = –9 + (n – 1) \cdot (–3) = –9 – 3n + 3 = –3n – 6$; $f_{20} = –3 \cdot 20 – 6 = –66$

14 Actividad resuelta.

15 Determina la diferencia de cada progresión aritmética, escribe el término general correspondiente e indica el valor del término que ocupa la posición cien.

a. {–12, –3, 6, 15, 24, …}

$d = –3 – (–12) = 9$, $a_n = –12 + (n – 1) \cdot 9 = –12 + 9n – 9 = 9n – 21$, $a_{100} = 879$

b. {3, 7, 11, 15, 19, …}

$d = 7 - 3 = 4$, $b_n = 3 + (n - 1) \cdot 4 = 3 + 4n - 4 = 4n - 1$, $b_{100} = 399$

c. {2, 4, 6, 8, 10, 12, …}

$d = 4 - 2 = 2$, $c_n = 2 + (n - 1) \cdot 2 = 2 + 2n - 2 = 2n$, $c_{100} = 200$

d. {8, 1, –6, –13, –20, …}

$d = 1 - 8 = -7$, $d_n = 8 + (n - 1) \cdot (-7) = 8 - 7n + 7 = -7n + 15$, $d_{100} = -685$

e. {0, –5, –10, –15, –20, …}

$d = -5 - 0 = -5$, $e_n = 0 + (n - 1) \cdot (-5) = -5n + 5$, $e_{100} = -495$

f. { –1, –3, –5, –7, –9, …}

$d = -3 - (-1) = -2$, $f_n = -1 + (n - 1) \cdot (-2) = -1 - 2n + 2 = -2n + 1$, $f_{100} = -199$

16 Actividad resuelta.

17 El quinto término de una progresión aritmética es 9 y el décimo es 29. Averigua cuál es el término general de la progresión y calcula los cinco primeros términos.

Se averigua d teniendo en cuenta que:

$a_{10} = a_5 + 5d \Rightarrow 29 = 9 + 5d \Rightarrow 20 = 5d \Rightarrow d = 4$

Una vez determinado d, se averigua a_1:

$a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow 9 = a_1 + 4 \cdot 4 \Rightarrow a_1 = 9 - 16 = -7$

Por tanto, el término general es:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow a_n = -7 + (n - 1) \cdot 4 = -7 + 4n - 4 = 4n - 11$

El término general es $a_n = 4n - 11$ y los 5 primeros términos son

$a_1 = -7$, $a_2 = -3$, $a_3 = 1$, $a_4 = 5$, $a_5 = 9$

18 Actividad resuelta.

19 Determina tres números, *x, y, z,* tales que {2, *x, y, z,* 22…} formen una progresión aritmética.

Es una progresión aritmética formada por 5 términos. Se calcula d:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow a_5 = a_1 + (5 - 1) \cdot d \Rightarrow 22 = 2 + 4d \Rightarrow d = 5$

El término general de la progresión aritmética es, por tanto:

$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 5 = 2 + 5n - 5 = 5n - 3$

A partir del término general se hallan *x, y* y *z:*

$x = a_2 = 5 \cdot 2 - 3 = 7$

$y = a_3 = 5 \cdot 3 - 3 = 12$

$z = a_4 = 5 \cdot 4 - 3 = 17$

SOLUCIONES PÁG. 69

20 Halla con tu compañero los siete primeros términos de cada progresión aritmética y calculad luego su suma de dos maneras diferentes:

• Sumando los términos uno a uno.

• Usando la expresión para S_7.

a. {3, 13, 23, 33, …}

Los 7 primeros términos son 3, 13, 23, 33, 43, 53 y 63 y su suma es:

S_7 = 3 + 13 + 23 + 33 + 43 + 53 + 63 = 231.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} \Rightarrow S_7 = \frac{(3+63)\cdot 7}{2} = 231$$

b. {25, 14, 3, –8, …}

Los 7 primeros términos son 25, 14, 3, –8, –19, –30 y –41 y su suma es:

S_7 = 25 + 14 + 3 + (–8) + (–19) + (–30) + (–41) = –56.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} \Rightarrow \frac{(25-41)\cdot 7}{2} = -56$$

c. {–15, –9, –3, 3, …}

Los 7 primeros términos son –15, –9, –3, 3, 9, 15 y 21 y su suma es:

S_7 = –15 + (–9) + (–3) + 3 + 9 + 15 + 21 = 21.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} \Rightarrow \frac{(-15+21)\cdot 7}{2} = 21$$

d. {–9, –21, –33, –45, …}

Los 7 primeros términos son –9, –21, –33, –45, –57, –69 y –81 y su suma es:

S_7 = –9 + (–21) + (–33) + (–45) + (–57) + (–69) + (–81) = –315.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} \Rightarrow \frac{(-9-81)\cdot 7}{2} = -315$$

21 Calcula la suma de los términos que se indican de las siguientes progresiones aritméticas:

a. Los 16 primeros términos si a_1 = 3 y a_{16} = 78.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} \Rightarrow S_{16} = \frac{(3+78)\cdot 16}{2} = 648$$

b. Los 50 primeros términos si b_1 = –2 y b_{50} = 292.

$$S_n = \frac{(b_1 + b_n)\cdot n}{2} \Rightarrow S_{50} = \frac{(-2+292)\cdot 50}{2} = 7\,250$$

c. Los 25 primeros términos si c_1 = 100 y c_{25} = –116.

$$S_n = \frac{(c_1 + c_n)\cdot n}{2} \Rightarrow S_{25} = \frac{(100-116)\cdot 25}{2} = -200$$

d. Los 37 primeros términos si d_1 = –3 y d_{37} = –291.

$$S_n = \frac{(d_1 + d_n)\cdot n}{2} \Rightarrow S_{37} = \frac{(-3-291)\cdot 37}{2} = -5\,439$$

e. Los 20 primeros términos si e_1 = –40 y e_{20} = 40.

$$S_n = \frac{(e_1 + e_n)\cdot n}{2} \Rightarrow S_{20} = \frac{(-40+40)\cdot 20}{2} = 0$$

22 Determina, en cada caso, el término general de la progresión aritmética y calcula la suma de los términos indicada.

a. {4, 11, 18, 25, 32, …}; S_{20}

$a_n = 4 + (n-1)\cdot 7 = 4 + 7n - 7 = 7n - 3$

$a_{20} = 7\cdot 20 - 3 = 137$

$$S_{20} = \frac{(4+137)\cdot 20}{2} = 1\,410$$

b. {10, 6, 2, –2, –6, …}; S_{15}

$b_n = 10 + (n-1)\cdot(-4) = 10 - 4n + 4 = -4n + 14$

$b_{15} = -4\cdot 15 + 14 = -46$

$$S_{15} = \frac{(10-46)\cdot 15}{2} = -270$$

c. {0, 11, 22, 33, 44, …}; S_{30}

$c_n = 0 + (n-1)\cdot 11 = 11n - 11$

$c_{30} = 11\cdot 30 - 11 = 319$

$$S_{30} = \frac{(0+319)\cdot 30}{2} = 4\,785$$

d. {–20, –14, –8, –2, …}; S_{45}

$d_n = -20 + (n-1)\cdot 6 = -20 + 6n - 6 = 6n - 26$

$d_{45} = 6\cdot 45 - 26 = 244$

$$S_{45} = \frac{(-20+244)\cdot 45}{2} = 5\,040$$

e. {–7, –6, –5, –4, –3, …}; S_{10}

$e_n = -7 + (n - 1) \cdot 1 = -7 + n - 1 = n - 8$

$e_{10} = 10 - 8 = 2$

$S_{10} = \frac{(-7+2)\cdot 10}{2} = -25$

23 Si el término general de una progresión aritmética es $a_n = 13n - 7$, ¿cuánto vale la suma de sus quince primeros términos?

Se calcula a_1 y a_{15}:

$a_1 = 13 - 7 = 6$

$a_{15} = 13 \cdot 15 - 7 = 188$

Se halla la suma de los quince primeros términos:

$S_{15} = \frac{(6+188)\cdot 15}{2} = 1\,455$

La suma es 1 455.

24 Halla la suma de los términos que se indica para cada una de estas progresiones aritméticas:

a. $a_1 = 15$; $a_2 = 23$; S_{10}

Se calcula la diferencia:

$d = a_2 - a_1 = 23 - 15 = 8$

Se halla el término general:

$a_n = 15 + (n - 1) \cdot 8 = 8n + 7$

Se averigua el décimo término:

$a_{10} = 8 \cdot 10 + 7 = 87$

La suma de los diez primeros términos es:

$S_{10} = \frac{(15+87)\cdot 10}{2} = 510$

b. $b_1 = -13$; $d = 7$; S_{27}

Se halla el término general:

$b_n = -13 + (n - 1) \cdot 7 = 7n - 20$

El término vigesimoséptimo:

$b_{27} = 7 \cdot 27 - 20 = 169$

Y la suma: $S_{27} = \frac{(-13+169)\cdot 27}{2} = 2\,106$

c. $\mathbf{c_5 = 41,\ c_8 = 65;\ S_{30}}$

Se calcula la diferencia:

$c_8 = c_5 + 3d \Rightarrow 65 = 41 + 3d \Rightarrow d = 8$

El primer término:

$c_8 = c_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow 65 = c_1 + (8 - 1) \cdot 8 \Rightarrow 65 = c_1 + 56 \Rightarrow c_1 = 9$

El término general:

$c_n = 9 + (n - 1) \cdot 8 = 8n + 1$

El término trigésimo:

$c_{30} = 8 \cdot 30 + 1 = 241$

Y la suma: $S_{30} = \dfrac{(9+241)\cdot 30}{2} = 3\,750$

d. $\mathbf{d_9 = -21;\ d_{10} = -26;\ S_{40}}$

Se calcula la diferencia:

$d = d_{10} - d_9 = -26 - (-21) = -5$

El noveno término:

$d_9 = d_1 + (n - 1) \cdot (-5) \Rightarrow -21 = d_1 + (9 - 1) \cdot (-5) \Rightarrow -21 = d_1 - 40 \Rightarrow d_1 = 19$

El término general:

$d_n = d_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow d_n = 19 + (n - 1) \cdot (-5) = -5n + 24$

El término cuadragésimo:

$d_{40} = -5 \cdot 40 + 24 = -176$

Y la suma: $S_{40} = \dfrac{(19-176)\cdot 40}{2} = -3\,140$

e. $\mathbf{e_{10} = 10;\ e_{15} = -10;\ S_{25}}$

Se calcula la diferencia:

$e_{15} = e_{10} + 5d \Rightarrow -10 = 10 + 5d \Rightarrow d = -4$

El primer término:

$e_{10} = e_1 + (n - 1) \cdot (-4) \Rightarrow 10 = e_1 + (10 - 1) \cdot (-4) \Rightarrow e_1 = 46$

El término general:

$e_n = 46 + (n - 1) \cdot (-4) = -4n + 50$

El término vigésimo quinto:

$e_{25} = -4n + 50 = -4 \cdot 25 + 50 = -50$

Y la suma: $S_{25} = \dfrac{(46-50)\cdot 25}{2} = -50$

25 ¿Cuánto vale la suma de los 20 primeros términos de una progresión aritmética en la que a_{10} = 65 y la diferencia entre términos consecutivos es 5?

Se calcula el primer término:

$a_{10} = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow 65 = a_1 + (10 - 1) \cdot 5 \Rightarrow 65 = a_1 + 45 \Rightarrow a_1 = 20$

El término general:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow a_n = 20 + (n - 1) \cdot 5 = 5n + 15$

El término vigésimo:

$a_{20} = 5 \cdot 20 + 15 = 115$

La suma de los veinte primeros términos:

$S_{20} = \frac{(20+115)\cdot 20}{2} = 1\,350$

26 Halla las sumas que se indican a continuación:

a. La suma de los veinte primeros números pares.

En esta progresión, el primer término es 2 y la diferencia es 2. El término general es:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow a_n = 2 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow a_n = 2n$

El valor del término vigésimo:

$a_{20} = 2 \cdot 20 = 40$

La suma de los veinte primeros términos:

$S_{20} = \frac{(2+40)\cdot 20}{2} = 420$

b. La suma de los veinte primeros números impares.

En esta progresión, el primer término es 1 y la diferencia es 2. El término general es:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow a_n = 2n - 1$

El valor del término vigésimo:

$a_{20} = 2 \cdot 20 - 1 = 39$

La suma de los veinte primeros términos:

$S_{20} = \frac{(1+39)\cdot 20}{2} = 400$

c. La suma de los quince primeros múltiplos de 5.

En esta progresión, el primer término es 5 y la diferencia es 5. El término general es:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow a_n = 5 + (n - 1) \cdot 5 \Rightarrow a_n = 5n$

El valor del término décimo quinto:

$a_{15} = 5 \cdot 15 = 75$

La suma de los quince primeros términos:

$S_{15} = \dfrac{(5+75)\cdot 15}{2} = 600$

d. La suma de los quince primeros múltiplos de 3.

En esta progresión, el primer término es 3 y la diferencia es 3. El término general es:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow a_n = 3 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow a_n = 3n$

El valor del término décimo quinto:

$a_{15} = 3 \cdot 15 = 45$

La suma de los quince primeros términos:

$S_{15} = \dfrac{(3+45)\cdot 15}{2} = 360$

e. La suma de los diez primeros múltiplos de 9.

En esta progresión, el primer término es 9 y la diferencia es 9. El término general es:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow a_n = 9 + (n - 1) \cdot 9 \Rightarrow a_n = 9n$

El valor del término décimo:

$a_9 = 9 \cdot 10 = 90$

La suma de los diez primeros términos:

$S_{10} = \dfrac{(9+90)\cdot 10}{2} = 495$

27 Actividad resuelta.

28 Calcula la suma que se indica en cada caso:

a. La suma de los múltiplos de 3 menores que 120.

En esta progresión aritmética, el primer término es 3 y el ultimo término es 117, ya que tiene que ser menor que 120. Además, la diferencia es tres.

Para averiguar el número de términos que se van a sumar, se aplica la expresión:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow 117 = 3 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow 117 = 3 + 3n - 3 \Rightarrow n = 39$

La suma es: $S_{39} = \dfrac{(3+117)\cdot 39}{2} = 2\,340$

b. La suma de los números pares entre 200 y 300.

En esta progresión aritmética, el primer término es 200 y el ultimo término es 300. Además, la diferencia es 2.

Para averiguar el número de términos que se van a sumar, se aplica la expresión:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow 300 = 200 + (n-1) \cdot 2 \Rightarrow 100 = 2n - 2 \Rightarrow n = 51$

La suma es:

$$S_{51} = \frac{(200+300)\cdot 51}{2} = 12\ 750$$

c. La suma de los múltiplos de 5 entre 100 y 200.

En esta progresión aritmética, el primer término es 100 y el ultimo término es 200. Además, la diferencia es 5.

Para averiguar el número de términos que se van a sumar, se aplica la expresión:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow 200 = 100 + (n-1) \cdot 5 \Rightarrow 100 = 5n - 5 \Rightarrow n = 21$

La suma es:

$$S_{21} = \frac{(100+200)\cdot 21}{2} = 3\ 150$$

d. La suma de los múltiplos de 6 menores que 240.

En esta progresión aritmética, el primer término es 6 y el ultimo término es 234, ya que tiene que ser menor que 240. Además, la diferencia es seis.

Para averiguar el número de términos que se van a sumar, se aplica la expresión:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow 234 = 6 + (n-1) \cdot 6 \Rightarrow 228 = 6n - 6 \Rightarrow n = 39$

Por tanto, la suma es:

$$S_{39} = \frac{(6+234)\cdot 39}{2} = 4\ 680$$

29 Raquel se ha propuesto entrenar para una prueba atlética de la siguiente manera: el primer día correrá 5 km y cada día irá incrementando la distancia en 500 m. Si cumple su plan durante dos semanas, ¿cuántos kilómetros habrá recorrido en total?

Se halla el término general de esta progresión aritmética, teniendo en cuenta que $a_1 = 5$, $d = 0{,}5$ y $n = 14$:

$a_n = 5 + (n-1) \cdot 0{,}5 = 0{,}5n + 4{,}5$

Se calcula la distancia que recorre el día décimo cuarto:

$a_{14} = 0{,}5n + 4{,}5 = 0{,}5 \cdot 14 + 4{,}5 = 11{,}5$

Y por último se calcula la suma de los 14 primeros términos:

$$S_{14} = \frac{(5+11{,}5)\cdot 14}{2} = 115{,}5$$

30 Paula comienza hoy a ahorrar dinero: este primer día guarda 2 € y cada uno de los sucesivos va a guardar 20 cts. más que el anterior. ¿Cuánto dinero ahorrará Paula al cabo de un mes?

Se halla el término general de esta progresión aritmética, teniendo en cuenta que $a_1 = 2$, $d = 0,2$ y $n = 30$ (se supone que un mes tiene 30 días):

$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 0,2 = 0,2n + 1,8$

Se calcula la cantidad de dinero que guarda el último día:

$a_{30} = 0,2n + 1,8 \Rightarrow a_{30} = 0,2 \cdot 30 + 1,8 = 7,8$

El dinero que ahorrará es la suma de los 30 primeros términos:

$$S_{30} = \frac{(2+7,8)\cdot 30}{2} = 147$$

SOLUCIONES PÁG. 71

31 Averigua si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas o no:

En una progresión geométrica, cada término se calcula multiplicando por una cantidad fija al término anterior. Dicha cantidad recibe el nombre de razón.

a. {3, 9, 27, 81, …}

$$\frac{9}{3} = \frac{27}{9} = \frac{81}{27} = 3 \Rightarrow r = 3$$

Sí es una progresión geométrica, ya que para obtener el valor de un término se multiplica por 3 al anterior.

b. {3, 9, 15, 21, …}

$$\frac{9}{3} \neq \frac{15}{9}$$

No es una progresión geométrica, ya que para obtener el valor de un término no se multiplica por una misma cantidad fija.

c. {–2, –5, –8, –11, …}

$$\frac{-5}{-2} \neq \frac{-8}{-5}$$

No es una progresión geométrica, ya que para obtener el valor de un término no se multiplica por una misma cantidad fija.

d. {–1, –2, –4, –8, …}

$$\frac{-2}{-1} = \frac{-4}{-2} = \frac{-8}{-4} = 2 \Rightarrow r = 2$$

Sí es una progresión geométrica, ya que para obtener el valor de un término se multiplica por 2 al anterior.

32 Calcula los cinco primeros términos de las siguientes progresiones geométricas mediante la ley de recurrencia. Ayúdate de la calculadora para efectuar las operaciones.

La ley de recurrencia para una progresión geométrica es: $a_n = a_{n-1} \cdot r$

a. $\mathbf{a_1 = 4; r = 2}$

$a_1 = 4$

$a_2 = a_{2-1} \cdot r = a_1 \cdot r = 4 \cdot 2 = 8$

$a_3 = a_{3-1} \cdot r = a_2 \cdot r = 8 \cdot 2 = 16$

$a_4 = a_{4-1} \cdot r = a_3 \cdot r = 16 \cdot 2 = 32$

$a_5 = a_{5-1} \cdot r = a_4 \cdot r = 32 \cdot 2 = 64$

b. $\mathbf{b_1 = –5; r = 3}$

$b_1 = -5$

$b_2 = b_{2-1} \cdot r = b_1 \cdot r = -5 \cdot 3 = -15$

$b_3 = b_{3-1} \cdot r = b_2 \cdot r = -15 \cdot 3 = -45$

$b_4 = b_{4-1} \cdot r = b_3 \cdot r = -45 \cdot 3 = -135$

$b_5 = b_{5-1} \cdot r = b_4 \cdot r = -135 \cdot 3 = -405$

c. $\mathbf{c_1 = 12; r = \frac{1}{2}}$

$c_1 = 12$

$c_2 = c_{2-1} \cdot r = c_1 \cdot r = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$

$c_3 = c_{3-1} \cdot r = c_2 \cdot r = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$

$c_4 = c_{4-1} \cdot r = c_3 \cdot r = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$c_5 = c_{5-1} \cdot r = c_4 \cdot r = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

d. $\mathbf{d_1 = –12; r = \frac{1}{2}}$

$d_1 = -12$

$d_2 = d_{2-1} \cdot r = d_1 \cdot r = -12 \cdot \frac{1}{2} = -6$

$d_3 = d_{3-1} \cdot r = d_2 \cdot r = -6 \cdot \frac{1}{2} = -3$

$d_4 = d_{4-1} \cdot r = d_3 \cdot r = -3 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

$d_5 = d_{5-1} \cdot r = d_4 \cdot r = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$

e. $e_1 = 2; r = 10$

$e_1 = 2$

$e_2 = e_{2-1} \cdot r = e_1 \cdot r = 2 \cdot 10 = 20$

$e_3 = e_{3-1} \cdot r = e_2 \cdot r = 20 \cdot 10 = 200$

$e_4 = e_{4-1} \cdot r = e_3 \cdot r = 200 \cdot 10 = 2\,000$

$e_5 = e_{5-1} \cdot r = e_4 \cdot r = 2\,000 \cdot 10 = 20\,000$

f. $f_1 = -9; d = \frac{1}{3}$

$f_1 = -9$

$f_2 = f_{2-1} \cdot r = f_1 \cdot r = -9 \cdot \frac{1}{3} = -3$

$f_3 = f_{3-1} \cdot r = f_2 \cdot r = -3 \cdot \frac{1}{3} = -1$

$f_4 = f_{4-1} \cdot r = f_3 \cdot r = -1 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$

$f_5 = f_{5-1} \cdot r = f_4 \cdot r = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}$

33 Halla el término general de cada una de las progresiones geométricas de la actividad anterior. Utiliza en cada caso el término general para calcular el quinto término.

a. $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$

b. $b_n = b_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow b_n = -5 \cdot 3^{n-1}$

c. $c_n = c_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow c_n = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

d. $d_n = d_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow d_n = -12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

e. $e_n = e_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow e_n = 2 \cdot 10^{n-1}$

f. $f_n = f_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow f_n = -9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

34 Actividad resuelta.

35 Halla la razón de cada una de las siguientes progresiones geométricas y escribe el término general correspondiente:

Las progresiones geométricas verifican que el cociente entre dos términos consecutivos es la razón, *r:*

a. $\{-3, -12, -48, -192, \dots\}$

$$r = \frac{-12}{-3} = 4$$

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = -3 \cdot 4^{n-1}$

b. $\left\{10, 2, \frac{2}{5}, \frac{2}{25}, \dots\right\}$

$$r = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$b_n = b_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow b_n = 10 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

c. $\{4, -8, 16, -32, \dots\}$

$$r = \frac{-8}{4} = -2$$

$c_n = c_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow c_n = 4 \cdot (-2)^{n-1}$

d. $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots\right\}$

$$r = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$d_n = d_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow d_n = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n}$

e. $\{0{,}4;\ 0{,}8;\ 1{,}6;\ 3{,}2;\ \dots\}$

$$r = \frac{0{,}8}{0{,}4} = 2$$

$e_n = e_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow e_n = 0{,}4 \cdot 2^{n-1}$

f. $\left\{1, -\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, -\frac{1}{125}, \dots\right\}$

$$r = \frac{-\frac{1}{5}}{1} = -\frac{1}{5}$$

$f_n = f_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow f_n = 1 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

36 Actividad resuelta.

37 Calcula el término general de las progresiones geométricas que cumplen estas condiciones:

a. $a_1 = 6$; $a_2 = 18$

Se calcula la razón:

$$r = \frac{18}{6} = 3$$

El término general es:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = 6 \cdot 3^{n-1}$

b. $b_2 = 10$; $b_4 = 40$

Se calcula la razón:

$b_4 = b_2 \cdot r^2 \Rightarrow 40 = 10 \cdot r^2 \Rightarrow r = \pm 2$

Se obtienen dos progresiones geométricas que cumplen las características del enunciado y cuyos términos generales son:

- Si $r = 2 \Rightarrow b_n = b_1 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow b_2 = b_1 \cdot 2^{2-1} \Rightarrow 10 = b_1 \cdot 2 \Rightarrow b_1 = 5$
  Así, el término general es:
  $b_n = b_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow b_n = 5 \cdot 2^{n-1}$
- Si $r = -2 \Rightarrow b_n = b_1 \cdot (-2)^{n-1} \Rightarrow b_2 = b_1 \cdot (-2)^{2-1} \Rightarrow 10 = b_1 \cdot (-2) \Rightarrow b_1 = -5$
  Así, el término general es:
  $b_n = b_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow b_n = -5 \cdot (-2)^{n-1}$

c. $c_1 = 12$; $c_2 = 2$

Se calcula la razón:

$$r = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

El término general es:

$$c_n = c_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow c_n = 12 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

d. $d_3 = 7$; $d_4 = 28$

Se calcula la razón:

$$r = \frac{28}{7} = 4$$

Y el primer término:

$$d_n = d_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow 7 = d_1 \cdot 4^{3-1} \Rightarrow 7 = d_1 \cdot 4^2 \Rightarrow d_1 = \frac{7}{16}$$

El término general es:

$$d_n = d_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow d_n = \frac{7}{16} \cdot 4^{n-1}$$

38 Una determinada bacteria tarda una hora en duplicarse. Calcula cuántas bacterias hay en el cultivo de un laboratorio al cabo de 8 h si inicialmente había 100.

Se trata de una progresión geométrica en la que $a_1 = 100$ y $r = 2$. Con estos datos, se calcula el término general:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = 100 \cdot 2^{n-1}$

De esta forma a las 8 horas:

$a_8 = 100 \cdot 2^{8-1} = 12\,800$

Habrá 12 800 bacterias.

39 Un supermercado regala un vale de 2 puntos por la primera compra de un producto y duplica los puntos cada vez que se adquiera de nuevo ese artículo. Por cada punto se descuenta 1 cént. de la compra realizada. ¿Cuánto dinero descontarán a Carmen la quinta vez que compre el producto ofertado?

Se trata de una progresión geométrica en la que $a_1 = 2$ y $r = 2$. Con estos datos, se calcula el término general:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

De esta forma, en la quinta compra:

$a_5 = 2^5 = 32$

Le descontarán 32 céntimos de la compra.

40 Sara ha publicado un vídeo de su fiesta de cumpleaños en una red social y lo ha compartido con 30 amigos. Cada uno de ellos lo ha compartido a su vez con otros 30 amigos, y así sucesivamente. ¿Cuántas personas pueden ver el vídeo de Sara si se ha compartido hasta el décimo grado de amistad?

Se trata de una progresión geométrica en la que $a_1 = 1$ y $r = 30$.

El término general es:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = 1 \cdot 30^{n-1} = 30^{n-1}$

Se calcula el número de amigos que lo ven en cada grado de amistad:

$a_1 = 30^0 = 1$

$a_2 = 30^1 = 30$

$a_3 = 30^2 = 900$

$a_4 = 30^3 = 27\ 000$

$a_5 = 30^4 = 810\ 000$

$a_6 = 30^5 = 24\ 300\ 000$

$a_7 = 30^6 = 729\ 000\ 000$

$a_8 = 30^7 = 21\ 870\ 000\ 000$

$a_9 = 30^8 = 656\ 100\ 000\ 000$

$a_{10} = 30^9 = 19\ 683\ 000\ 000\ 000$

El número total de amigos que han visto el vídeo es la suma de cada uno de los términos:

1 + 30 + 900 + 27 000 + 810 000 + 24 300 000 + 729 000 000 + 21 870 000 000 +

+ 656 100 000 000 + 19 683 000 000 000 = 20 361 724 137 931 Pueden ver el vídeo 20 361 724 137 931 personas.

SOLUCIONES PÁG. 73

41 Actividad resuelta.

42 Calcula, con la ayuda de la calculadora científica, las sumas de los términos que se indican de las siguientes progresiones geométricas:

a. Los diez primeros términos si $a_1 = 5$ y $r = 2$.

En esta progresión, el primer término es 5 y la razón es 5. La suma de los diez primeros términos es:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_{10} = \frac{5 \cdot \left(2^{10} - 1\right)}{2 - 1} = 5\ 115$$

b. Los diez primeros términos si $b_1 = -5$ y $r = 2$.

En esta progresión, el primer término es –5 y la razón es 2. La suma de los diez primeros términos es:

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_{10} = \frac{-5 \cdot \left(2^{10} - 1\right)}{2 - 1} = -5\ 115$$

c. Los seis primeros términos si $c_1 = 400$ y $r = 0{,}1$.

En esta progresión, el primer término es 400 y la razón es 0,1. La suma de los seis primeros términos es:

$$S_n = \frac{c_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{400 \cdot \left(0{,}1^6 - 1\right)}{0{,}1 - 1} = 444{,}444$$

d. Los diez primeros términos si d_1 = 40 y r = 3.

En esta progresión, el primer término es 40 y la razón es 3. La suma de los diez primeros términos es:

$$S_n = \frac{d_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_{10} = \frac{40 \cdot \left(3^{10} - 1\right)}{3 - 1} = 1\ 180\ 960$$

e. Los ocho primeros términos si e_1 = 300 y r = 0,2.

En esta progresión, el primer término es 300 y la razón es 0,2. La suma de los ocho primeros términos es:

$$S_n = \frac{e_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_8 = \frac{300 \cdot \left(0,2^8 - 1\right)}{0,2 - 1} = 374,999\ 04$$

43 Actividad resuelta

44 Halla, en cada caso, la suma de términos indicada.

a. $\left\{21, 7, \frac{7}{3}, \frac{7}{9}, \dots\right\}$ **; S_6**

Se halla la razón de esta progresión:

$$r = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{21 \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^6 - 1\right]}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{21 \cdot \left(\frac{1}{729} - 1\right)}{-\frac{2}{3}} = \frac{21 \cdot \left(-\frac{728}{729}\right)}{-\frac{2}{3}} = \frac{2548}{81}$$

b. {81, 27, 9, 3, …}; S_8

Se halla la razón de esta progresión:

$$r = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_8 = \frac{81 \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^8 - 1\right]}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{81 \cdot \left(\frac{1}{6561} - 1\right)}{-\frac{2}{3}} = \frac{81 \cdot \left(-\frac{6560}{6561}\right)}{-\frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{3280}{27}$$

45 Calcula las sumas que se indican.

En esta actividad, cabe pensar en que la primera potencia en cada caso puede ser o 1 o la potencia en sí. Se desarrollarán las dos posibilidades.

a. La suma de las diez primeras potencias de 2.

- Si se considera la primera potencia 1, $a_1 = 1 = 2^0$, y r = 2, entonces el término general es:
  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = 1 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_n = 2^{n-1}$
  La suma de las diez primeras potencias de 2 es:
  $S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_{10} = \frac{1 \cdot \left(2^{10} - 1\right)}{2 - 1} = 1\,023$
- Si se considera la primera potencia 2, $a_1 = 2$, y r = 2, entonces el término general es:
  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = 2 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_n = 2^n$
  La suma de las diez primeras potencias de 2 es:
  $S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_{10} = \frac{2 \cdot \left(2^{10} - 1\right)}{2 - 1} = 2\,046$

b. La suma de las ocho primeras potencias de 10.

- Si se considera la primera potencia 1, $a_1 = 1 = 10^0$, y r = 10, entonces el término general es:
  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = 1 \cdot 10^{n-1} \Rightarrow a_n = 10^{n-1}$
  La suma de las ocho primeras potencias de 10 es:
  $S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_8 = \frac{1 \cdot \left(10^8 - 1\right)}{10 - 1} = 11\,111\,111$
- Si se considera la primera potencia 10, $a_1 = 10$, y r = 10, entonces el término general es:
  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = 10 \cdot 10^{n-1} \Rightarrow a_n = 10^n$
  La suma de las ocho primeras potencias de 10 es:
  $S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_8 = \frac{10 \cdot \left(10^8 - 1\right)}{10 - 1} = 111\,111\,110$

c. La suma de las ocho primeras potencias de $\frac{1}{2}$.

- Si se considera la primera potencia 1, $a_1 = 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$, y $r = \frac{1}{2}$, entonces el término general es:
  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

La suma de las ocho primeras potencias de $\frac{1}{2}$ es:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_8 = \frac{1 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^8 - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{255}{128}$$

- Si se considera la primera potencia $\frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{2}$, y $r = \frac{1}{2}$, entonces el término general es:

  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

  La suma de las ocho primeras potencias de $\frac{1}{2}$ es:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_8 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^8 - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{255}{256}$$

d. La suma de las seis primeras potencias de $\frac{2}{3}$.

- Si se considera la primera potencia 1, $a_1 = 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$, y $r = \frac{2}{3}$, entonces el término general es:

  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

  La suma de las seis primeras potencias de $\frac{2}{3}$ es:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{1 \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^6 - 1\right]}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{665}{243}$$

- Si se considera la primera potencia $\frac{2}{3}$, $a_1 = \frac{2}{3}$ y $r = \frac{2}{3}$, entonces el término general es:

  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

La suma de las seis primeras potencias de $\frac{2}{3}$ es:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{\frac{2}{3} \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^6 - 1\right]}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{1330}{729}$$

46 Halla el término general de cada progresión geométrica y calcula la suma de los términos que se indican.

a. {0,1; 0,01; 0,001; …}; S_8

Se calcula la razón:

$$r = \frac{0{,}01}{0{,}1} = \frac{1}{10}$$

El término general es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = 0{,}1 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{10}\right)^{n} = 0{,}1^n$$

La suma de los ocho primeros términos es:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1} \Rightarrow S_8 = \frac{0{,}1\cdot\left(0{,}1^8 - 1\right)}{0{,}1-1} = 0{,}111\ 111\ 11$$

b. {81, 27, 9, 3, …}; S_5

Se calcula la razón:

$$r = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$$

El término general es:

$$b_n = b_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow b_n = 81\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 3^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3^{n-5}}$$

La suma de los cinco primeros términos es:

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1} \Rightarrow S_5 = \frac{81\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^5 - 1\right]}{\frac{1}{3}-1} = 121$$

c. {–3, –6, –12, –24, …}; S_{10}

Se calcula la razón:

$$r = \frac{-6}{-3} = 2$$

El término general es:

$c_n = c_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow c_n = -3 \cdot 2^{n-1}$

La suma de los diez primeros términos es:

$$S_n = \frac{c_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1} \Rightarrow S_{10} = \frac{-3\cdot\left(2^{10} - 1\right)}{2-1} = -3\ 069$$

d. {23; 2,3; 0,23; …}; S_6

Se calcula la razón:

$$r = \frac{2{,}3}{23} = \frac{1}{10}$$

El término general es:

$$d_n = d_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow d_n = 23 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{23}{10^{n-1}}$$

La suma de los seis primeros términos es:

$$S_n = \frac{d_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{23 \cdot \left[\left(\frac{1}{10}\right)^6 - 1\right]}{\frac{1}{10} - 1} = 25{,}555\ 53$$

e. $\left\{\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \ldots\right\}$; S_9

Se calcula la razón:

$$r = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

El término general es:

$$e_n = e_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow e_n = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

La suma de los nueve primeros términos es:

$$S_n = \frac{e_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_9 = \frac{\frac{3}{2} \cdot \left[\left(\frac{3}{2}\right)^9 - 1\right]}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{57\,513}{512}$$

47 Dada la progresión geométrica {–2, 4, –8, 16, –32, …}:

a. Escribe su término general.

Se calcula la razón:

$$r = \frac{4}{-2} = -2$$

El término general es:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = -2 \cdot (-2)^{n-1} \Rightarrow a_n = (-2)^n$

b. Calcula la suma de los diez primeros términos.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_{10} = \frac{-2 \cdot \left[(-2)^{10} - 1\right]}{-2-1} = 682$$

c. Indica qué signo tiene la suma.

El signo es positivo.

d. Determina la suma de los once primeros términos. ¿Qué signo tiene la suma?

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_{11} = \frac{-2 \cdot \left[(-2)^{11} - 1\right]}{-2-1} = -1\,366$$

El signo es negativo.

e. Halla los valores de S_{12} y S_{13} y analiza sus signos.

$$S_{12} = \frac{-2 \cdot \left[(-2)^{12} - 1\right]}{-2-1} = 2\,730 \Rightarrow \text{El signo es positivo.}$$

$$S_{13} = \frac{-2 \cdot \left[(-2)^{13} - 1\right]}{-2-1} = -5\,462 \Rightarrow \text{El signo es negativo.}$$

f. Explica de qué depende el signo de S_n.

El signo de la suma depende de si sumamos un número par o impar de términos.

48 Escribe el término general de cada progresión geométrica y calcula las sumas de los términos que se indican.

a. $\left\{ \mathbf{225,\ 45, 9,\ \frac{9}{5}, \ldots} \right\}$**; S_5**

Se calcula la razón:

$$r = \frac{45}{225} = \frac{1}{5}$$

El término general es:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = 225 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

La suma de los cinco primeros términos es:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_5 = \frac{225 \cdot \left[\left(\frac{1}{5}\right)^5 - 1\right]}{\frac{1}{5} - 1} = \frac{7029}{25}$$

b. {6, –18, 54, –162, 486, …}; S_{15}

Se calcula la razón:

$r = \frac{-18}{6} = -3$

El término general es:

$b_n = b_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow b_n = 6 \cdot (-3)^{n-1}$

La suma de los quince primeros términos es:

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_{15} = \frac{6 \cdot \left[(-3)^{15} - 1\right]}{-3 - 1} = 21\,523\,362$$

c. {–6, 18, –54, 162, –486, …}; S_{15}

Se calcula la razón:

$r = \frac{18}{-6} = -3$

El término general es:

$c_n = c_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow c_n = -6 \cdot (-3)^{n-1}$

La suma de los quince primeros términos es:

$$S_n = \frac{c_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_{15} = \frac{-6 \cdot \left[(-3)^{15} - 1\right]}{-3 - 1} = -21\,523\,362$$

d. $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$**; S_{10}**

Se calcula la razón:

$$r = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{-1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

El término general es:

$d_n = d_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow d_n = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$

La suma de los diez primeros términos es:

$$S_n = \frac{d_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_{10} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right]}{-\frac{1}{2} - 1} = -\frac{341}{1024}$$

49 **Diana cuenta un secreto a tres amigas; en una hora, cada una se lo cuenta a otras tres personas, y así sucesivamente. ¿Cuántas personas conocen el secreto al cabo de 10 h?**

Se trata de una progresión geométrica en la que $a_1 = 1$ y $r = 3$.

El término general es:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$

Al cabo de 10 h, el número total de personas que conocen el secreto es:

$$S_{10} = \frac{3 \cdot \left(3^{10-1} - 1\right)}{3 - 1} = 29\,523$$

Al cabo de 10 horas, conocen el secreto 29 523personas.

SOLUCIONES PÁG. 75

1 **Completa el mapa conceptual con la definición de sucesión, de término general y de sucesión recurrente. Complétalo también con las fórmulas de las progresiones aritméticas y las geométricas.**

Respuesta abierta.

2 **Elabora otro mapa conceptual en el que aparezcan ejemplos para cada uno de los elementos que figuran en el mapa anterior.**

Respuesta abierta.

3 **Realiza una investigación sobre sucesiones famosas en distintas épocas de la historia y elabora una presentación con Prezzi o con SlideShare para compartirla con tus compañeros.**

Respuesta abierta.

4 Elabora una página de pasatiempos numéricos usando sucesiones definidas por recurrencia, aritméticas y geométricas. Comparte los pasatiempos que hayas creado mediante Google Docs o publícalos en la revista de tu centro.

Respuesta abierta.

5 Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. Las sucesiones solo pueden ser progresiones aritméticas o progresiones geométricas.

Falso, también hay sucesiones definidas por recurrencia.

b. La sucesión de Fibonacci es una progresión geométrica.

Falso, es una sucesión por recurrencia.

c. Las sucesiones son conjuntos infinitos y ordenados de números.

Verdadero.

d. El término general de una sucesión permite encontrar cualquier término a partir de su término anterior.

Falso.

e. Las progresiones geométricas se caracterizan por su primer término y su razón *r*.

Verdadero.

f. La suma de los *n* términos de una progresión aritmética es siempre positiva.

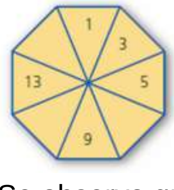
Falso, también puede ser negativo.

SOLUCIONES PÁG. 76 - REPASO FINAL

SUCESIONES

1 Copia estas figuras en tu cuaderno y complétalas con los números que faltan:

a.



Se observa que un término se obtiene sumando 2 al anterior:

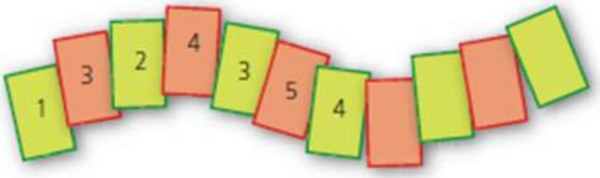
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15

b.

Se observa que cada término es la suma de los que están justo debajo de él:

1, 2, 3, 4, 5, 3, 5, 7, 9, 8, 12, 16, 20, 28, 48

c.



Se observa que las posiciones impares son los números naturales comenzando desde 1, mientras que para las posiciones pares son los números naturales pero empezando por 3:

1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6, 5, 7, 6, 8

2 Analiza cada figura y dibuja en tu cuaderno cinco términos más de cada sucesión.

a.

Cada término es el cuadrado del número de la posición que ocupa:

$a_1 = 1^2 = 1$

$a_2 = 2^2 = 4$

$a_3 = 3^2 = 9$

$a_4 = 4^2 = 16$

Las figuras de los siguientes cinco términos son cuadrados formados por 25, 36, 49, 64 y 81 bolas.

b.

Cada término está formado por el producto del número de su posición por su posición más uno:

$a_1 = 1 \cdot (1 + 1) = 1 \cdot 2 = 2$

$a_2 = 2 \cdot (2 + 1) = 2 \cdot 3 = 6$

$a_3 = 3 \cdot (3 + 1) = 3 \cdot 4 = 12$

Las figuras de los siguientes cinco términos están formadas por bolas dispuestas en rectángulos de 4 filas y 5 columnas, 5 filas y 6 columnas, 6 filas y 7 columnas, 7 filas y 8 columnas y 8 filas y 9 columnas.

c.

Cada figura se forma añadiendo una fila inferior con una bola más que la anterior. Así, las figuras de los siguientes cinco términos tienen 15, 21, 28, 36, 45 bolas, respectivamente.

3 Loreto ha encontrado pasatiempos numéricos en un periódico. ¿Sabrías resolverlos?

a. Completa en tu cuaderno la ficha que falta. (El número de la casilla inferior se construye a partir del número de la superior).

Los números son 77 y 14 (la suma de las cifras de la casilla superior).

b. Completa la siguiente serie numérica:

Los números son 720 y 5 040 (cada término se obtiene multiplicando su posición por el número anterior).

4 Lee atentamente y encuentra en cada caso los diez primeros términos de la sucesión.

a. Los dos primeros términos son 2 y –3, y cada uno de los siguientes se obtiene de multiplicar sus dos términos anteriores.

$a_1 = 2,\ a_2 = -3,\ a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$

$a_1 = 2$

$a_2 = -3$

$a_3 = a_{3-1} \cdot a_{3-2} = a_2 \cdot a_1 = -3 \cdot 2 = -6$

$a_4 = a_{4-1} \cdot a_{4-2} = a_3 \cdot a_2 = -6 \cdot (-3) = 18$

$a_5 = a_{5-1} \cdot a_{5-2} = a_4 \cdot a_3 = 18 \cdot (-6) = -108$

$a_6 = a_{6-1} \cdot a_{6-2} = a_5 \cdot a_4 = –108 \cdot 18 = –1\ 944$

$a_7 = a_{7-1} \cdot a_{7-2} = a_6 \cdot a_5 = –1\ 944 \cdot (–108) = 209\ 952$

$a_8 = a_{8-1} \cdot a_{8-2} = a_7 \cdot a_6 = 209\ 952 \cdot (–1\ 944) = –408\ 146\ 688$

$a_9 = a_{9-1} \cdot a_{9-2} = a_8 \cdot a_7 = –408\ 146\ 688 \cdot 209\ 952 = –85\ 691\ 213\ 438\ 976$

$a_{10} = a_{10-1} \cdot a_{10-2} = a_9 \cdot a_8 = –85\ 691\ 213\ 438\ 976 \cdot (–408\ 146\ 688) =$

$= 34\ 974\ 584\ 955\ 819\ 144\ 511\ 488$

b. Los dos primeros términos son 80 y 20, y cada uno de los siguientes se obtiene de dividir sus dos términos anteriores en el orden en que aparecen en la sucesión.

$a_1 = 80,\ a_2 = 20,\ a_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$

$a_1 = 80$

$a_2 = 20$

$a_3 = \dfrac{a_{3-2}}{a_{3-1}} = \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{80}{20} = 4$

$a_4 = \dfrac{a_{4-2}}{a_{4-1}} = \dfrac{a_2}{a_3} = \dfrac{20}{4} = 5$

$a_5 = \dfrac{a_{5-2}}{a_{5-1}} = \dfrac{a_3}{a_4} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

$a_6 = \dfrac{a_{6-2}}{a_{6-1}} = \dfrac{a_4}{a_5} = \dfrac{5}{0{,}8} = 6{,}25$

$a_7 = \dfrac{a_{7-2}}{a_{7-1}} = \dfrac{a_5}{a_6} = \dfrac{0{,}8}{6{,}25} = 0{,}128$

$a_8 = \dfrac{a_{8-2}}{a_{8-1}} = \dfrac{a_6}{a_7} = \dfrac{6{,}25}{0{,}128} = 48{,}828125$

$a_9 = \dfrac{a_{9-2}}{a_{9-1}} = \dfrac{a_7}{a_8} = \dfrac{0{,}128}{48{,}828125} = 0{,}002\ 621\ 44$

$a_{10} = \dfrac{a_{10-2}}{a_{10-1}} = \dfrac{a_8}{a_9} = \dfrac{48{,}828125}{0{,}002\ 621\ 44} = 18\ 626{,}451\ 492\ 309\ 570\ 312\ 5$

c. El primer término es 6, y cada uno de los siguientes es la suma del cuadrado de su posición y de su término anterior.

$a_1 = 6,\ a_n = n^2 + a_{n-1}$

$a_1 = 6$

$a_2 = n^2 + a_{n-1} = 2^2 + 6 = 10$

$a_3 = n^2 + a_{n-1} = 3^2 + 10 = 19$

$a_4 = n^2 + a_{n-1} = 4^2 + 19 = 35$

$a_5 = n^2 + a_{n-1} = 5^2 + 35 = 60$

$a_6 = n^2 + a_{n-1} = 6^2 + 60 = 96$

$a_7 = n^2 + a_{n-1} = 7^2 + 96 = 145$

$a_8 = n^2 + a_{n-1} = 8^2 + 145 = 209$

$a_9 = n^2 + a_{n-1} = 9^2 + 209 = 290$

$a_{10} = n^2 + a_{n-1} = 10^2 + 290 = 390$

d. Los dos primeros términos son –1 y –7, y cada uno de los siguientes se obtiene restando sus dos términos anteriores en el orden en el que aparecen en la sucesión.

$a_1 = -1$, $a_2 = -7$, $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$

$a_1 = -1$

$a_2 = -7$

$a_3 = a_{3-2} - a_{3-1} = a_1 - a_2 = -1 - (-7) = 6$

$a_4 = a_{4-2} - a_{4-1} = a_2 - a_3 = -7 - 6 = -13$

$a_5 = a_{5-2} - a_{5-1} = a_3 - a_4 = 6 - (-13) = 19$

$a_6 = a_{6-2} - a_{6-1} = a_4 - a_5 = -13 - 19 = -32$

$a_7 = a_{7-2} - a_{7-1} = a_5 - a_6 = 19 - (-32) = 51$

$a_8 = a_{8-2} - a_{8-1} = a_6 - a_7 = -32 - 51 = -83$

$a_9 = a_{9-2} - a_{9-1} = a_7 - a_8 = 51 - (-83) = 134$

$a_{10} = a_{10-2} - a_{10-1} = a_8 - a_9 = -83 - 134 = -217$

5 Aplica la prioridad de las operaciones y escribe los seis primeros términos de las siguientes sucesiones:

a. $a_n = n^2 - 1$

$a_1 = 1^2 - 1 = 0$

$a_2 = 2^2 - 1 = 3$

$a_3 = 3^2 - 1 = 8$

$a_4 = 4^2 - 1 = 15$

$a_5 = 5^2 - 1 = 24$

$a_6 = 6^2 - 1 = 35$

b. $b_n = \dfrac{n^2 - 1}{n}$

$b_1 = \dfrac{1^2 - 1}{1} = 0$

$b_2 = \dfrac{2^2 - 1}{2} = \dfrac{3}{2}$

$b_3 = \dfrac{3^2 - 1}{3} = \dfrac{8}{3}$

$b_4 = \dfrac{4^2 - 1}{4} = \dfrac{15}{4}$

$b_5 = \dfrac{5^2 - 1}{5} = \dfrac{24}{5}$

$b_6 = \dfrac{6^2 - 1}{6} = \dfrac{35}{6}$

c. $c_n = 5n^3$

$c_1 = 5 \cdot 1^3 = 5$

$c_2 = 5 \cdot 2^3 = 40$

$c_3 = 5 \cdot 3^3 = 135$

$c_4 = 5 \cdot 4^3 = 320$

$c_5 = 5 \cdot 5^3 = 625$

$c_6 = 5 \cdot 6^3 = 1\,080$

d. $\mathbf{d_n = 10^n - 1}$

$d_1 = 10^1 - 1 = 9$

$d_2 = 10^2 - 1 = 99$

$d_3 = 10^3 - 1 = 999$

$d_4 = 10^4 - 1 = 9\,999$

$d_5 = 10^5 - 1 = 99\,999$

$d_6 = 10^6 - 1 = 999\,999$

e. $\mathbf{e_n = (-1)^n \cdot n}$

$e_1 = (-1)^1 \cdot 1 = -1$

$e_2 = (-1)^2 \cdot 2 = 2$

$e_3 = (-1)^3 \cdot 3 = -3$

$e_4 = (-1)^4 \cdot 4 = 4$

$e_5 = (-1)^5 \cdot 5 = -5$

$e_6 = (-1)^6 \cdot 6 = 6$

f. $\mathbf{f_n = \dfrac{n+2}{n+3}}$

$f_1 = \dfrac{1+2}{1+3} = \dfrac{3}{4}$

$f_2 = \dfrac{2+2}{2+3} = \dfrac{4}{5}$

$f_3 = \dfrac{3+2}{3+3} = \dfrac{5}{6}$

$f_4 = \dfrac{4+2}{4+3} = \dfrac{6}{7}$

$f_5 = \dfrac{5+2}{5+3} = \dfrac{7}{8}$

$f_6 = \dfrac{6+2}{6+3} = \dfrac{8}{9}$

6 Actividad resuelta.

7 Escribe los seis primeros términos de las siguientes sucesiones:

a. $\mathbf{a_n = 2^n + a_{n-1};\ a_1 = 1}$

$a_1 = 1$

$a_2 = 2^2 + 1 = 5$

$a_3 = 2^3 + 5 = 13$

$a_4 = 2^4 + 13 = 29$

$a_5 = 2^5 + 29 = 61$

$a_6 = 2^6 + 61 = 125$

b. $\mathbf{b_n = b_{n-1} + b_{n-2};\ b_1 = -2,\ b_2 = 4}$

$b_1 = -2$

$b_2 = 4$

$b_3 = b_{3-1} + b_{3-2} = b_2 + b_1 = 4 + (-2) = 2$

$b_4 = b_{4-1} + b_{4-2} = b_3 + b_2 = 2 + 4 = 6$

$b_5 = b_{5-1} + b_{5-2} = b_4 + b_3 = 6 + 2 = 8$

$b_6 = b_{6-1} + b_{6-2} = b_5 + b_4 = 8 + 6 = 14$

c. $\mathbf{c_n = c_{n-1} - c_{n-2};\ c_1 = 5,\ c_2 = 2}$

$c_1 = 5$

$c_2 = 2$

$c_3 = c_{3-1} - c_{3-2} = c_2 - c_1 = 2 - 5 = -3$

$c_4 = c_{4-1} - c_{4-2} = c_3 - c_2 = -3 - 2 = -5$

$c_5 = c_{5-1} - c_{5-2} = c_4 - c_3 = -5 - (-3) = -2$

$c_6 = c_{6-1} - c_{6-2} = c_5 - c_4 = -2 - (-5) = 3$

d. $\mathbf{d_n = n + d_{n-1};\ d_1 = 7}$

$d_1 = 7$

$d_2 = 2 + d_{2-1} = 2 + 7 = 9$

$d_3 = 3 + d_{3-1} = 3 + 9 = 12$

$d_4 = 4 + d_{4-1} = 4 + 12 = 16$

$d_5 = 5 + d_{5-1} = 5 + 16 = 21$

$d_6 = 6 + d_{6-1} = 6 + 21 = 27$

SOLUCIONES PÁG. 77

8 Dada la sucesión que tiene por término general $a_n = 3n^2$:

a. Escribe los ocho primeros términos.

$a_1 = 3 \cdot 1^2 = 3$ $a_5 = 3 \cdot 5^2 = 75$

$a_2 = 3 \cdot 2^2 = 12$ $a_6 = 3 \cdot 6^2 = 108$

$a_3 = 3 \cdot 3^2 = 27$ $a_7 = 3 \cdot 7^2 = 147$

$a_4 = 3 \cdot 4^2 = 48$ $a_8 = 3 \cdot 8^2 = 192$

b. Observa los términos que acabas de escribir y averigua cuál es el término general de la sucesión {2, 11, 26, 47, …}.

Los términos de esta sucesión son una unidad inferior, por lo tanto:

$b_n = 3n^2 – 1$

c. Escribe el término general de la sucesión {4, 13, 28, 49, …}.

Los términos de esta sucesión son una unidad superior, por lo tanto:

$c_n = 3n^2 + 1$

d. Escribe los seis primeros términos de la sucesión $b_n = n^3$, y a partir de ellos escribe los seis primeros términos de las sucesiones $c_n = n^3 + 1$ y $d_n = n^3 – 1$.

$b_1 = 1^3 = 1$ $b_4 = 4^3 = 64$

$b_2 = 2^3 = 8$ $b_5 = 5^3 = 125$

$b_3 = 3^3 = 27$ $b_6 = 6^3 = 1216$

La sucesión c_n es la misma que b_n pero cada término es una unidad superior, por tanto, $c_n = \{2, 9, 28, 65, 126, 217, …\}$

La sucesión d_n es la misma que b_n pero cada término es una unidad inferior, por tanto, $d_n = \{0, 7, 26, 63, 124, 215, …\}$

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

9 Averigua si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas. En caso afirmativo, di cuáles son las diferencias y escribe los términos generales correspondientes.

En una progresión aritmética cada término se calcula sumando una cantidad fija al término anterior. Esta cantidad fija es la diferencia.

a. {2, 5, 7, 10, 12, 15, 17, …}

$5 – 2 \neq 7 – 5$

No es progresión aritmética.

b. {12, 7, 2, –3, –8, –13, …}

$7 – 12 = 2 – 7 = –3 – 2 = –8 – (–3) = –13 – (–8) = 5 \Rightarrow d = –5$

Sí es progresión aritmética. Su término general es:

$b_n = b_1 + (n – 1) \cdot d \Rightarrow b_n = 12 + (n – 1) \cdot (–5) = 17 – 5n$

c. {2, 10, 20, 28, 56, 64, …}

$10 - 2 \neq 20 - 10$

No es progresión aritmética.

d. {–15, –12, –9, –6, –3, …}

$-12 - (-15) = -9 - (-12) = -6 - (-9) = -3 - (-6) = 3 \Rightarrow d = 3$

Sí es progresión aritmética. Su término general es:

$d_n = d_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow d_n = -15 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 18$

10 Encuentra los seis primeros términos de cada progresión aritmética e indica cuál es la diferencia correspondiente:

a. $a_n = 3n + 7$

$a_1 = 3 \cdot 1 + 7 = 10$

$a_2 = 3 \cdot 2 + 7 = 13$

$a_3 = 3 \cdot 3 + 7 = 16$

$a_4 = 3 \cdot 4 + 7 = 19$

$a_5 = 3 \cdot 5 + 7 = 22$

$a_6 = 3 \cdot 6 + 7 = 25$

La diferencia es $d = 3$

b. $b_n = -n - 2$

$b_1 = -1 - 2 = -3$

$b_2 = -2 - 2 = -4$

$b_3 = -3 - 2 = -5$

$b_4 = -4 - 2 = -6$

$b_5 = -5 - 2 = -7$

$b_6 = -6 - 2 = -8$

La diferencia es $d = -1$

c. $c_n = 5n +1$

$c_1 = 5 \cdot 1 + 1 = 6$

$c_2 = 5 \cdot 2 + 1 = 11$

$c_3 = 5 \cdot 3 + 1 = 16$

$c_4 = 5 \cdot 4 + 1 = 21$

$c_5 = 5 \cdot 5 + 1 = 26$

$c_6 = 5 \cdot 6 + 1 = 31$

La diferencia es $d = 5$

d. $d_n = -4n + 2$

$d_1 = -4 \cdot 1 + 2 = -2$

$d_2 = -4 \cdot 2 + 2 = -6$

$d_3 = -4 \cdot 3 + 2 = -10$

$d_4 = -4 \cdot 4 + 2 = -14$

$d_5 = -4 \cdot 5 + 2 = -18$

$d_6 = -4 \cdot 6 + 2 = -22$

La diferencia es $d = -4$

11 Carlos está entrenando para participar en una carrera de larga distancia. Las sesiones de entrenamiento durarán 10 min la primera semana y aumentarán en 8 min cada semana posterior.

a. ¿Cuánto durarán las sesiones de entrenamiento dentro de 4 semanas?

Se sabe que $a_1 = 10$ y $d = 8$. Se construye la expresión del término general:

$a_n = a_1 +(n - 1) \cdot d \Rightarrow a_n = 10 + (n - 1) \cdot 8 = 10 + 8n - 8 = 8n + 2$

Se calcula el tiempo de entrenamiento dentro de cuatro semanas:

$a_4 = 8 \cdot 4 + 2 = 34$

Dentro de 4 semanas entrenará 34 minutos.

b. ¿Cuántas semanas han de pasar para que las sesiones duren una hora y media?

Una hora y media son 90 minutos:

$a_n = 8n + 2 \Rightarrow 90 = 8n + 2 \Rightarrow n = \frac{88}{8} = 11$

Al cabo de 11 semanas las sesiones duraran hora y media.

12 Visita esta página web y entra en el apartado dedicado a progresiones aritméticas. Después, halla el término general de las progresiones aritméticas que cumplen las siguientes condiciones:

http://www.amolasmates.es/progresiones/aritmeticas.htm

a. $a_1 = 2$; $a_3 = 8$

Se calcula la diferencia:

$a_3 = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow 8 = 2 + (3 - 1) \cdot d \Rightarrow d = 3$

El término general es:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow a_n = 2 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow a_n = 3n - 1$

b. $b_1 = 10$; $b_4 = 40$

Se calcula la diferencia:

$b_4 = b_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow 40 = 10 + (4 - 1) \cdot d \Rightarrow d = 10$

El término general es:

$b_n = b_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow b_n = 10 + (n - 1) \cdot 10 \Rightarrow b_n = 10n$

c. $c_1 = 7$; $c_6 = 12$

Se calcula la diferencia:

$c_6 = c_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow 12 = 7 + (6 - 1) \cdot d \Rightarrow d = 1$

El término general es:

$c_n = c_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow c_n = 7 + (n - 1) \cdot 1 \Rightarrow c_n = n + 6$

d. $d_2 = 6$; $d_3 = 8$

Se calcula la diferencia:

$d_3 - d_2 = d \Rightarrow 8 - 6 = d \Rightarrow d = 2$

Se halla el primer término:

$d_3 = d_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow 8 = d_1 + (3 - 1) \cdot 2 \Rightarrow d_1 = 4$

El término general es:

$d_n = d_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow d_n = 4 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow d_n = 2n + 2$

13 Halla, en cada caso, el término general de la progresión aritmética que cumple las condiciones indicadas.

a. $a_5 = 7$; $a_6 = 12$

Se calcula la diferencia:

$a_6 - a_5 = d \Rightarrow 12 - 7 = d \Rightarrow d = 5$

Se halla el primer término:

$a_5 = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow 7 = a_1 + (5 - 1) \cdot 5 \Rightarrow a_1 = -13$

El término general es:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow a_n = -13 + (n - 1) \cdot 5 \Rightarrow a_n = 5n - 18$

b. $b_1 = 9$; $b_5 = 25$

Se calcula la diferencia:

$b_5 = b_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow 25 = 9 + (5 - 1) \cdot d \Rightarrow d = 4$

El término general es:

$b_n = b_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow b_n = 9 + (n - 1) \cdot 4 \Rightarrow b_n = 4n + 5$

c. $c_4 = 15$; $c_8 = -5$

Se calcula la diferencia:

$c_8 = c_4 + 4d \Rightarrow -5 = 15 + 4d \Rightarrow d = -5$

Se halla el primer término:

$c_4 = c_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow 15 = c_1 + (4 - 1) \cdot (-5) \Rightarrow c_1 = 30$

El término general es:

$c_n = c_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow c_n = 30 + (n - 1) \cdot (-5) \Rightarrow c_n = -5n + 35$

d. $d_7 = 20$; $d = 8$

Se halla el primer término:

$d_7 = d_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow 20 = d_1 + (7 - 1) \cdot 8 \Rightarrow d_1 = -28$

El término general es:

$d_n = d_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow d_n = -28 + (n - 1) \cdot 8 \Rightarrow d_n = 8n - 36$

14 Escribe cuatro números, *a, b, c* y *d,* tales que 7*, a, b, c, d,* 47… formen una progresión aritmética.

Es una progresión aritmética formada por 6 términos. Se calcula d:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow a_6 = a_1 + (6 - 1) \cdot d \Rightarrow 47 = 7 + 5d \Rightarrow d = 8$

El término general de la progresión aritmética es, por tanto:

$a_n = 7 + (n - 1) \cdot 8 = 7 + 8n - 8 = 8n - 1$

A partir del término general se hallan *a, b, c* y *d:*

$a = a_2 = 8 \cdot 2 - 1 = 15$

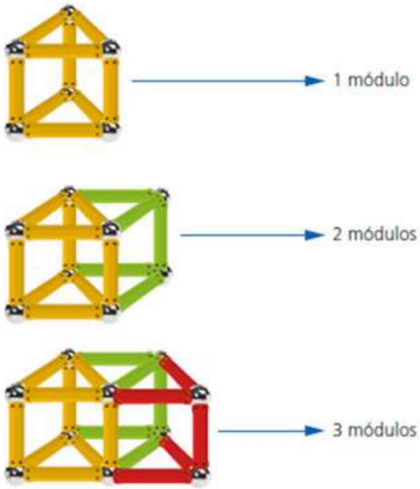
$b = a_3 = 8 \cdot 3 - 1 = 23$

$c = a_4 = 8 \cdot 4 - 1 = 31$

$d = a_5 = 8 \cdot 5 - 1 = 39$

Los números son 15, 23, 31 y 39.

15 Observa las construcciones de módulos que está realizando Julia con unas varillas magnéticas:



a. Escribe la sucesión que representa el número de varillas que necesita Julia para efectuar las cinco primeras construcciones.

El primer módulo está formado por nueve varillas, por lo tanto, $a_1 = 9$.

El segundo módulo está formado por 14 varillas, es decir, cinco varillas más. El tercer módulo está formado por 19 varillas, es decir, cinco varillas más que el anterior. Por lo tanto, d = 5.

De esta manera, para cuarto módulo necesitará 19 + 5 = 24 varillas, y para el quinto módulo 24 + 5 = 29 varillas.

La sucesión es: $a_n = \{9, 14, 19, 24, 29, \ldots\}$

b. Halla el término general de la sucesión.

$a_1 = 9$; $d = 5$;

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow a_n = 9 + (n - 1) \cdot 5 = 9 + 5n - 5 = 5n + 4$

c. ¿Cuántas varillas necesita Julia para hacer una construcción con diez módulos?

$a_{10} = 5 \cdot 10 + 4 = 54$

Necesita 54 varillas.

SOLUCIONES PÁG. 78

SUMA DE LOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA

16 Calcula, en cada caso, la suma de los términos de la progresión aritmética indicada.

a. S_{20} si $a_{20} = 175$ y $d = 8$

Se calcula a_1:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow a_{20} = a_1 + (20 - 1) \cdot 8 \Rightarrow 175 = a_1 + (20 - 1) \cdot 8 \Rightarrow a_1 = 23$

La suma de los 20 primeros términos es:

$$S_n = \frac{(a_n + a_1) \cdot n}{2} \Rightarrow S_{20} = \frac{(175 + 23) \cdot 20}{2} = 1980$$

b. S_{30} si $a_1 = 8$ y $a_5 = 20$

Se calcula la diferencia:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow a_5 = a_1 + (5 - 1) \cdot d \Rightarrow 20 = 8 + (5 - 1) \cdot d \Rightarrow d = 3$

El término general de esta progresión es:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow a_n = 8 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow a_n = 3n + 5$

Se halla el valor del término trigésimo:

$a_n = 3n + 5 \Rightarrow a_{30} = 3 \cdot 30 + 5 = 95$

La suma de los 30 primeros términos es:

$$S_n = \frac{(a_n + a_1) \cdot n}{2} \Rightarrow S_{30} = \frac{(95 + 8) \cdot 30}{2} = 1545$$

c. S_{25} si $a_4 = -6$ y $a_8 = -62$

Se calcula la diferencia:

$a_8 = a_4 + 4d \Rightarrow -62 = -6 + 4d \Rightarrow d = -14$

Se halla a_1:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow a_4 = a_1 + (4 - 1) \cdot (-14) \Rightarrow -6 = a_1 - 42 \Rightarrow a_1 = 36$

El término general de esta progresión es:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow a_n = 36 + (n - 1) \cdot (-14) \Rightarrow a_n = -14n + 50$

El valor del término vigésimo quinto es:

$a_n = -14n + 50 \Rightarrow a_{25} = -14 \cdot 25 + 50 = -300$

La suma de los 25 primeros términos es:

$$S_n = \frac{(a_n + a_1) \cdot n}{2} \Rightarrow S_{25} = \frac{(-300 + 36) \cdot 25}{2} = -3300$$

17 ¿Cuántos términos de la progresión {3, 5, 7, …} hay que sumar para obtener un resultado de 957?

Teniendo en cuenta que $a_1 = 3$ y que la diferencia es $d = 2$, se construye la expresión del término general:

$a_n = a_1 + (n – 1) \cdot d \Rightarrow a_n = 3 + (n – 1) \cdot 2 = 2n + 1$

Se sabe que la suma debe ser 957. Por lo tanto, se sustituye en la expresión:

$$S_n = \frac{(a_n + a_1)\cdot n}{2} \Rightarrow 957 = \frac{(2n+1+3)\cdot n}{2} \Rightarrow 957 \cdot 2 = 2n^2 + 4n \Rightarrow n^2 + 2n - 957 = 0$$

Se resuelve la ecuación de segundo grado:

$$n = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 3828}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{3832}}{2}$$

Al no obtener una solución con un valor de n natural, no tiene solución.

18 La ONG Agua para la Vida va a construir un pozo para abastecer de agua potable a una población. Excavar el primer metro de profundidad cuesta 21 €, y cada metro que se profundiza en el terreno incrementa el precio de la obra 4,50 €.

a. Escribe una fórmula para averiguar el precio de la obra en función de la profundidad excavada.

- $n = 1 \Rightarrow c_1 = 21$
- $n = 2 \Rightarrow c_2 = 21 + 4{,}5 \cdot (n – 1) = 21 + 4{,}5 \cdot 1 = 25{,}5$
- $n = 3 \Rightarrow c_3 = 21 + 4{,}5 \cdot (n – 1) = 21 + 4{,}5 \cdot 2 = 30$

De esta manera, el término general es:

$c_n = 21 + 4{,}5 \cdot (n – 1) = a_1 + 4{,}5 \cdot (n – 1)$

Cada vez que se profundiza un metro, la excavación se incrementa, por lo tanto, hay que calcular la suma:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} = \frac{[a_1 + a_1 + 4{,}5\cdot(n-1)]\cdot n}{2} = \frac{[2a_1 + 4{,}5\cdot(n-1)]\cdot n}{2} =$$

$$= \frac{2a_1 \cdot n}{2} + \frac{4{,}5\cdot(n-1)\cdot n}{2} = a_1 \cdot n + 2{,}25\cdot(n-1)\cdot n = [a_1 + 2{,}25\cdot(n-1)]\cdot n =$$

$$= [21 + 2{,}25\cdot(n-1)]\cdot n$$

b. ¿Cuánto cuesta excavar un pozo de 20 m?

$S_{20} = [21 + 2{,}25 \cdot (20 – 1)] \cdot 20 = 1\,275$

El coste de un pozo de 20 m es de 1 275 €.

c. ¿Cuál es la profundidad de un pozo que ha costado 1 066,50 €?

$S_n = [21 + 2{,}25 \cdot (n – 1)] \cdot n$

$1\,066{,}5 = 21n + 2{,}25n^2 – 2{,}25n \Rightarrow 2{,}25n^2 + 18{,}75n – 1\,066{,}5 = 0$

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-18,75 \pm \sqrt{351,5625 + 9598,5}}{4,5} = \frac{-18,75 \pm 99,75}{4,5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n_1 = \dfrac{-18,75 + 99,75}{4,5} = 18 \Rightarrow \text{ La profundidad del pozo es de 18 m} \\ n_1 = \dfrac{-18,75 - 99,75}{4,5} \Rightarrow \text{Solución negativa.} \end{cases}$$

19 Una asociación de vecinos realiza una marcha para concienciar a la gente del barrio sobre la necesidad de recuperar un bosque. Desfilan formando un triángulo: en la primera fila hay una persona; en la segunda, 3; en la tercera, 5, y así sucesivamente.

a. Dibuja un esquema en tu cuaderno que muestre la disposición de los vecinos en el desfile.

Los vecinos se disponen formando un triángulo, de manera que en la primera fila se coloca una persona; en la segunda, tres personas; en la tercera, cinco personas, de manera que cada fila se incrementa en 2 personas más.

b. Establece la fórmula que representa el número de personas que hay en la fila n.

Se trata de una progresión aritmética en la que a_1 = 1 y d = 2. Por tanto, la expresión del término general es:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 1$

c. ¿Cuántas personas se necesitan para formar un triángulo con diez filas?

Se necesitan S_{10} = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100 personas.

d. Halla la fórmula que permite calcular las personas que se necesitan para formar un triángulo con n filas.

$$S_n = \frac{(1 + 2n - 1) \cdot n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

e. Averigua cuántas filas tiene el triángulo si han participado 225 personas.

$n^2 = 225 \Rightarrow n = 15$

El triángulo tiene 15 filas.

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

20 Averigua si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas. En caso afirmativo, di cuál es la razón y formula el término general.

a. 1, 2, 6, 12, 36, 72, …

$$\frac{2}{1} \neq \frac{6}{2}$$

No es progresión geométrica.

b. 9, 18, 36, 72, 144, …

$$\frac{18}{9}=\frac{36}{18}=\frac{72}{36}=\frac{144}{72}=2 \Rightarrow r = 2$$

Sí es una progresión geométrica porque cada término se obtiene multiplicando por 2 al término anterior.

El término general de la progresión geométrica es:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = 9 \cdot 2^{n-1}$

c. –1, 4, –16, 64, –256, …

$$\frac{4}{-1}=\frac{-16}{4}=\frac{64}{-16}=\frac{-256}{64}=-4 \Rightarrow r = -4$$

Sí es una progresión geométrica porque cada término se obtiene multiplicando por –4 al término anterior.

El término general de la progresión geométrica es:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = -1 \cdot (-4)^{n-1}$

d. 5, 15, 20, 60, 65, …

$$\frac{15}{5} \neq \frac{20}{15}$$

No es progresión geométrica.

21 Escribe los cinco primeros términos de las siguientes progresiones geométricas. Indica cuál es el primer término y la razón.

a. $\mathbf{a_n = 4 \cdot 3^n}$

$a_1 = 4 \cdot 3^1 = 12$

$a_2 = 4 \cdot 3^2 = 36$

$a_3 = 4 \cdot 3^3 = 108$

$a_4 = 4 \cdot 3^4 = 324$

$a_5 = 4 \cdot 3^5 = 972$

$a_1 = 12$, $r = 3$

b. $\mathbf{b_n = -8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n}$

$$b_1 = -8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^1 = -12$$

$$b_2 = -8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -18$$

$$b_3 = -8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = -27$$

$$b_4 = -8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 = -\frac{81}{2}$$

$$b_5 = -8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5 = -\frac{243}{4}$$

$b_1 = -12$, $r = \frac{3}{2}$

c. $\mathbf{c_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n}$

$c_1 = \left(-\frac{2}{3}\right)^1 = -\frac{2}{3}$

$c_2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

$c_3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$

$c_4 = \left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

$c_5 = \left(-\frac{2}{3}\right)^5 = -\frac{32}{243}$

$c_1 = -\frac{2}{3}$, $r = -\frac{2}{3}$

d. $\mathbf{d_n = -3 \cdot (-2)^n}$

$d_1 = -3 \cdot (-2)^1 = 6$

$d_2 = -3 \cdot (-2)^2 = -12$

$d_3 = -3 \cdot (-2)^3 = 24$

$d_4 = -3 \cdot (-2)^4 = -48$

$d_5 = -3 \cdot (-2)^5 = 96$

$d_1 = 6$, $r = -2$

22 Un centurión le pidió al césar que le recompensara por su valentía. El césar le concedió el siguiente premio:

«Toma un denario de esta montaña, ven mañana y toma dos. Puedes volver cada día y coger el doble de los denarios que te llevaras el día anterior. Pero solo podrás coger los denarios que puedas llevarte sin ayuda».

a. Cada denario pesa aproximadamente 20 g. Indica el peso que lleva el centurión los cinco primeros días.

El número de denarios que se llevará cada día es: 1, 2, 4, 8 y 16, con lo que es peso es:

20 g, 40 g, 80 g, 160 g, 320 g

b. Escribe una fórmula para calcular el peso que puede llevarse el centurión cada día.

Como $a_1 = 1$ y $r = 2$

$p_n = 20 \cdot 2^{n-1}$

c. ¿Cuánto pesan los denarios que le corresponden al centurión el vigésimo día?

$p_{20} = 20 \cdot 2^{20-1} = 20 \cdot 2^{19} = 10\,485\,760$

Pesan 10 485 760 gramos. Aproximadamente 10 486 kilogramos.

d. ¿Es una recompensa generosa? Razona la respuesta.

El centurión no puede llevarse indefinidamente denarios de la montaña porque el peso es excesivo en un número no muy elevado de días.

SOLUCIONES PÁG. 79

23 Visita esta página web y entra en el apartado dedicado a progresiones geométricas. Después, halla el término general de las progresiones geométricas que revisten las siguientes características:

http://www.amolasmates.es/progresiones/geometricas.htm

a. $a_1 = 2$; $a_3 = 8$

Se calcula la razón:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow 8 = 2 \cdot r^2 \Rightarrow r = \pm 2$

Hay dos progresiones geométricas, una por cada valor de r. Por tanto:

- Si r = 2

  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = 2 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_n = 2^n$

- Si r = –2

  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = 2 \cdot (-2)^{n-1} \Rightarrow a_n = 2^n$

b. $b_1 = 10$; $b_3 = 40$

Se calcula la razón:

$b_n = b_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow b_3 = b_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow 40 = 10 \cdot r^2 \Rightarrow r = \pm 2$

Hay dos progresiones geométricas, una por cada valor de r. Por tanto:

- Si r = 2

  $b_n = b_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow b_n = 10 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow b_n = 5 \cdot 2^n$

- Si r = –2

  $b_n = b_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow b_n = 10 \cdot (-2)^{n-1}$

c. $c_1 = 7$; $c_2 = 49$

Se calcula la razón:

$$r = \frac{c_2}{c_1} \Rightarrow r = \frac{49}{7} = 7$$

El término general es:

$c_n = c_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow c_n = 7 \cdot 7^{n-1} = 7^n$

d. $d_1 = 6$; $d_3 = 48$

Se calcula la razón:

$d_n = d_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow d_3 = d_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow 48 = 6 \cdot r^2 \Rightarrow r = \pm\sqrt{8}$

Hay dos progresiones geométricas, una por cada valor de r. Por tanto:

- Si $r = \sqrt{8}$

  $d_n = d_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow d_n = 6 \cdot (\sqrt{8})^{n-1}$

- Si $r = -\sqrt{8}$

  $d_n = d_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow d_n = 6 \cdot (-\sqrt{8})^{n-1}$

SUMA DE LOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

24 Dada la sucesión {8, 8, 8, 8, …}:

a. Halla la suma de los 5, 10, 20 y 30 primeros términos.

Se trata de una progresión geométrica cuyo primer término es 8 y cuya razón es 1. Así, el término general es:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = 8 \cdot 1^{n-1} = 8$

La suma para cada uno de los términos pedidos es:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} = \frac{(8+8)\cdot n}{2} = 8n$$

$S_5 = 40$, $S_{10} = 80$, $S_{20} = 160$, $S_{30} = 240$

b. Analiza los resultados del apartado anterior y obtén una fórmula para la sucesión de sumas de los términos de la sucesión $a_n = 8$: $\{S_1, S_2, S_3, \ldots\}$, donde $S_1 = 8$.

La nueva sucesión es una progresión aritmética {8, 16, 24, …}; la suma de los n términos es, por tanto: $S_n = \dfrac{(8+8n)\cdot n}{2}$

c. ¿Qué tipo de sucesión es S_n? Razona tu respuesta.

Es una progresión aritmética de diferencia 8.

d. Comprueba que {8, 8, 8, 8, …} es una progresión geométrica cuya razón es 1. Halla la suma de los n primeros términos de la progresión mediante la expresión correspondiente y compara el resultado con el obtenido en el apartado anterior.

Se observa que la fórmula para calcular la suma de *n* términos de una progresión geométrica no es aplicable al caso en que r = 1.

e. Investiga y di que tipo de sucesión es {8, 8, 8, 8,…}.

Es una progresión constante.

25 Calcula la suma de los seis primeros términos de las siguientes progresiones:

a. {1; 0,1; 0,01; 0,001; …}

(Nota: en la primera edición del libro del alumno falta un término en la progresión. Pone {1; 0,1; 0,001;…} *y debe poner* {1; 0,1; 0,01; 0,001; …}

Se calcula la razón:

$$\frac{0{,}1}{1} = \frac{0{,}01}{0{,}1} = \frac{0{,}001}{0{,}01} = \frac{1}{10} \Rightarrow r = \frac{1}{10}$$

La suma de los seis primeros términos es:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1} \Rightarrow S_6 = \frac{1 \cdot \left[\left(\frac{1}{10}\right)^6 - 1\right]}{\frac{1}{10} - 1} = 1{,}11111$$

b. {4, 12, 36, 108, …}

Se calcula la razón:

$$\frac{12}{4} = \frac{36}{12} = \frac{108}{36} = 3 \Rightarrow \ \Rightarrow r = 3$$

La suma de los seis primeros términos es:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1} \Rightarrow S_6 = \frac{4 \cdot \left(3^6 - 1\right)}{3-1} = 1456$$

c. $\left\{ \mathbf{21, 7, \frac{7}{3}, \frac{7}{9}, \frac{7}{27}, \ldots} \right\}$

Se calcula la razón:

$$\frac{7}{21} = \frac{\frac{7}{3}}{7} = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{7}{3}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \ r = \frac{1}{3}$$

La suma de los seis primeros términos es:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1} \Rightarrow S_6 = \frac{21 \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^6 - 1\right]}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{2548}{81}$$

d. {–1, 2, –4, 8, …}

Se calcula la razón:

$$\frac{2}{-1} = \frac{-4}{2} = \frac{8}{-4} = -2 \Rightarrow \ r = -2$$

La suma de los seis primeros términos es:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1} \Rightarrow S_6 = \frac{-1 \cdot \left[(-2)^6 - 1\right]}{-2-1} = 21$$

26 En la leyenda sobre la invención del juego de ajedrez que vimos en la página 72, el rey Ladava quiso premiar a su súbdito Sissa, inventor de dicho juego. Este pidió trigo: un grano por la primera casilla del ajedrez, dos por la segunda, cuatro por la tercera, y así sucesivamente hasta llegar a la casilla número 64. Responde a las siguientes cuestiones utilizando la calculadora:

a. ¿Cuántos granos de arroz recibió como premio el inventor del ajedrez con las primeras 32 casillas?

Se trata de una progresión geométrica en la que $a_1 = 1$; $r = 2$ y $a_n = 1 \cdot 2^{n-1}$

$S_{32} = \dfrac{1 \cdot \left(2^{32} - 1\right)}{2 - 1} = 4\,294\,967\,295$

Recibió 4 294 967 295 granos de arroz.

b. Si cada grano de arroz pesa, aproximadamente, 0,003 g, ¿cuántos kilogramos de arroz recibió Sissa con los granos de las 32 casillas?

4 294 967 295 × 0,003 = 12 884 901,885

Recibió 12 884,901 89 kilogramos de arroz.

EVALUACIÓN

1 ¿Cuál es el octavo término de la sucesión cuyo término general es $a_n = 3n - 2$?

a. 24 b. 22 **c. 16** **d. 3**

$a_8 = 3 \cdot 8 - 2 = 22$

2 ¿Cuál es el término general de la sucesión {3, 9, 27, 81}?

a. $a_n = n^2$ b. $a_n = 3^n$ **c. $a_n = n + n$** **d. $a_n = 3n + 3$**

$r = 3$; $a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$

3 ¿Cuál es el siguiente término de la sucesión {1, 3, 4, 7, 11, …}?

a. 12 **b. 77** **c. 15** d. 18

Cada término se obtiene sumando los dos anteriores, por tanto: 11 + 7 = 18.

4 Indica cuál de las siguientes sucesiones es una progresión aritmética.

a. {3, 4, 7, 11, 18, 29, …} **c. {1, 0, 1, 0, 1, 0, …}**

b. {2, 4, 8, 16, 32, 64, …} d. {8, 5, 2, –1, –4, –7, …}

Una progresión aritmética es una sucesión en la que cada término se calcula sumando una cantidad fija al término anterior. La única que cumple esto es d., ya que cada término se obtiene sumando (–3) al anterior.

5 Halla el término general de la progresión aritmética tal que $a_1 = 1$ y $a_5 = 21$.

a. $a_n = 5n – 4$ **b. $a_n = 2n – 2$** **c. $a_n = n + 5$** **d. $a_n = 5n + 1$**

Se halla la diferencia:

$a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow 21 = 1 + 4d \Rightarrow d = 5$

El término general es:

$a_n = 1 + (n – 1) \cdot 5 = 1 + 5n – 5 = 5n – 4$

6 Si el término general de una progresión aritmética es $a_n = 3n – 3$, ¿cuánto vale la suma de sus quince primeros términos?

a. 3 003 **b. 127** c. 315 **d. 42**

Se calcula $a_{15} = 3 \cdot 15 – 3 = 42$

$S_{15} = \frac{(0+42)\cdot 15}{2} = 315$

7 Halla el término general de la progresión geométrica en la que $a_1 = 10$ y $a_2 = –30$.

a. $a_n = 10 \cdot (–3)^{n – 1}$ **c. $a_n = 10 \cdot (–3)^n$**

b. $a_n = 10 \cdot (–30)^{n – 1}$ **d. $a_n = (–3)^{n – 1}$**

Se calcula r:

$r = \frac{–30}{10} = –3$;

El término general es: $a_n = 10 \cdot (–3)^{n – 1}$

8 Calcula la suma de los diez primeros términos de la progresión geométrica, $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots\right\}$

a. $-\frac{2048}{1024}$ **b. 2** **c.** $-\frac{1}{1024}$ **d.** $\frac{1023}{512}$

Se calcula r: r = $\frac{1}{2}$

La suma de diez primeros términos es:

$$S_{10} = \frac{1 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{-\frac{1023}{1024}}{-\frac{1}{2}} = \frac{1023}{512}$$