1) Hallar el resto de las siguientes divisiones:

a) $(x^{150} + 1) : (x + 1)$

a) $r = (-1)^{150} + 1 = 1 + 1 = 2$

b) $(x^{150} - 1) : (x + 1)$

b) $r = (-1)^{150} - 1 = 1 - 1 = 0$

c) $(x^{161} + 1) : (x - 1)$

c) $r = 1^{161} + 1 = 1 + 1 = 2$

d) $(x^{161} - 1) : (x - 1)$

d) $r = 1^{161} - 1 = 1 - 1 = 0$

2) Hallar el resto de las siguientes divisiones:

a) $x^3 - 4x^2 + x - 2$ por $x - 3$.

a) $r = P(3) = 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 3 - 2 = 27 - 36 + 3 - 2 = -8$

b) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 5x + 10$ por $x - 1$.

b) $r = P(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 10 = 1 - 2 - 3 + 5 + 10 = 11$

c) $x^6 + 4x^5 - 2x + 3$ por $x + 2$.

c) $r = P(-2) = (-2)^6 + 4 \cdot (-2)^5 - 2 \cdot (-2) + 3 = 64 - 128 + 4 + 3 = -57$

d) $x^3 - 3x^2 + 4$ por $x - 3$.

d) $r = P(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4 = 27 - 27 + 4 = 4$

1) Hallar a para que el polinomio $P(x) = x^3 - x^2 + 2x - a$ sea divisible por $x + 2$.

Dividimos aplicando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 2 & -a \\ -2 & & -2 & 6 & -16 \\ \hline & 1 & -3 & 8 & \boxed{-a-16} \end{array}$$

Para que $P(x)$ sea divisible por $x + 7$ el resto tiene que ser 0.

Es decir: $-a - 16 = 0$

Por lo tanto: $a = -16$

2) Hallar el valor de k para que al dividir $P(x) = x^4 - 2kx^3 + x^2 - 4kx + 9$ por $x + 1$ el resto sea -7.

Por el teorema del resto, se tiene que cumplir que: $P(-1) = -7$

$P(-1) = (-1)^4 - 2k(-1)^3 + (-1)^2 - 4k(-1) + 9 = -7$

Es decir: $1 + 2k + 1 + 4k + 9 = 11 + 6k = -7$

O lo que es lo mismo: $6k = -18$

Por lo tanto: $k = -3$

3) Siendo $P(x) = x^6 - 5x^4 + 6x^3 + ax^2 + 4x + b$, hallar a y b sabiendo que es divisible por $x - 3$ y por $x + 1$.

Si un polinomio es divisible por $x - a$ por el teorema del resto se tiene que cumplir que $P(a) = 0$.

Es decir, $P(3) = 0$ y $P(-1) = 0$

$P(3) = 3^6 - 5 \cdot 3^4 + 6 \cdot 3^3 + 9a + 12 + b = 0$

Es decir, $729 - 405 + 162 + 9a + 12 + b = 0$, por lo tanto $9a + b = -498$

$P(-1) = (-1)^6 - 5 \cdot (-1)^4 + 6(-1)^3 + a(-1)^2 - 4 + b = 0$

Es decir, $1 - 5 - 6 + a - 4 + b = 0$, o lo que es lo mismo $a + b = 14$

A continuación resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} 9a + b &=& -498 \\ a + b &=& 14 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{lcr} 9a \;\cancel{+b} &=& -498 \\ -a \;\cancel{-b} &=& -14 \\ \hline 8a &=& -512 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad a = -64$$