12 El primer término de una progresión aritmética es $a_1 = 100$ y su diferencia es $d = -8$. (●○○)

a) Encuentra su término general.

b) ¿Qué lugar ocupa el primer término negativo de la progresión?

a) Hay 2 formas de representar el término general:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + d \\ a_n = a_1 + (n-1)d \leftarrow \text{La que se ajusta a los datos:} \end{cases}$$

$$a_1 = 100$$
$$d = -8$$

$$a_n = 100 + (n-1)\cdot(-8) \Rightarrow a_n = 100 - 8(n-1)$$

Podemos desarrollar la expresión:

$$a_n = 100 - 8(n-1) = 100 - 8n + 8 = 108 - 8n$$

$$\boxed{a_n = 108 - 8n}$$

b) Para encontrar el 1.er término negativo analizamos el término general: $a_n = 108 - 8n$.

$a_n < 0$ cuando $-8n > 108$: $108 - 8n = 0 \Rightarrow n = \frac{108}{8} = 13'5$

Como $n \in \mathbb{N}$: $n = 14$.

Comprobamos que para $n = 14$: $a_n < 0$: $a_{14} = 108 - 8 \cdot 14 = -4$.

13 Calcula el término general de una progresión aritmética a partir de los términos $a_5 = 27$ y $a_{12} = 48$.

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

- Para $a_5 = 27$: $a_5 = 27 = a_1 + (5-1)d \rightarrow 27 = a_1 + 4d$.
- Para $a_{12} = 48$: $a_{12} = 48 = a_1 + (12-1)d \rightarrow 48 = a_1 + 11d$.

Tenemos un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\begin{cases} 27 = a_1 + 4d \\ 48 = a_1 + 11d \rightarrow \times(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} 27 = \cancel{a_1} + 4d \\ -48 = \cancel{-a_1} - 11d \\ \hline -21 = -7d \end{array} \Rightarrow d = \frac{21}{7} = 3$$

Sustituyendo en una cualquiera:

$$\left.\begin{array}{l} 27 = a_1 + 4 \cdot d \\ d = 3 \end{array}\right\} \rightarrow 27 = a_1 + 12 \Rightarrow a_1 = 15.$$

Por lo tanto el término general será: $a_n = 15 + (n-1)3$

Si lo desarrollamos:

$$a_n = 15 + 3n - 3 = 12 + 3n \rightarrow \boxed{a_n = 12 + 3n}$$

14 Calcula el término general de una progresión aritmética, dados los términos: (●○○)

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

a) $a_3 = 15$ y $a_9 = 27$

$\cdot$ Para $a_3 = 15$: $a_3 = 15 = a_1 + (3-1)d \Rightarrow 15 = a_1 + 2d$

$\cdot$ Para $a_9 = 27$: $a_9 = 27 = a_1 + (9-1)d \Rightarrow 27 = a_1 + 8d.$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 15 = a_1 + 2d \\ 27 = a_1 + 8d \end{array}\right\} (-1) \Rightarrow \begin{array}{l} -15 = -\cancel{a_1} - 2d \\ 27 = \cancel{a_1} + 8d \\ \hline 12 = 6d \end{array} \Rightarrow d = \frac{12}{6} = \underline{2}.$$

Sustituyendo en una de las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 15 = a_1 + 2\cdot d \\ d = 2 \end{array}\right\} 15 = a_1 + 4 \Rightarrow \underline{a_1 = 11}.$$

Finalmente: $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 11 + (n-1)2 = 11 + 2n - 2$

$$\boxed{a_n = 9 + 2n}$$

b) $a_6 = -7$ y $a_{12} = -12$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

• Para $a_6 = -7$: $a_6 = -7 = a_1 + (6-1)d \Rightarrow -7 = a_1 + 5d$

• Para $a_{12} = -12$: $a_{12} = -12 = a_1 + (12-1)d \Rightarrow -12 = a_1 + 11d.$

$$\left.\begin{array}{l} -7 = a_1 + 5d \\ -12 = a_1 + 11d \end{array}\right\} (-1) \rightarrow \begin{array}{l} 7 = -\cancel{a_1} - 5d \\ -12 = \cancel{a_1} + 11d \\ \hline -5 = 6d \end{array} \rightarrow d = \frac{-5}{6}$$

$$\left.\begin{array}{l} -7 = a_1 + 5d \\ d = -\frac{5}{6} \end{array}\right\} \rightarrow -7 = a_1 + 5\cdot\left(\frac{-5}{6}\right) \rightarrow -7 = a_1 - \frac{25}{6} \rightarrow$$

$$\rightarrow a_1 = -7 + \frac{25}{6} = \frac{-42+25}{6} = \frac{-17}{6}$$

Solución: $a_n = a_1 + (n-1)d = -\frac{17}{6} + (n-1)\left(\frac{-5}{6}\right) = \frac{-17}{6} - \frac{5}{6}n + \frac{5}{6} =$

$$= \left(\frac{-17}{6} + \frac{5}{6}\right) - \frac{5}{6}n = \frac{-12}{6} - \frac{5}{6}n = -2 - \frac{5}{6}n.$$

$$\boxed{a_n = -2 - \frac{5}{6}n}$$

17 De una progresión aritmética conocemos su diferencia $d = -5$ y $a_{10} = 31$. (●●○)

a) Calcula su primer término.

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

$$a_{10} = 31 = a_1 + (10-1)(-5) \Rightarrow 31 = a_1 - 45 \Rightarrow \underline{a_1 = 76}$$

b) Calcula su término general.

$$a_n = 76 + (n-1)(-5) = 76 - 5n + 5 = 81 - 5n$$

$$\boxed{a_n = 81 - 5n}$$

c) Calcula la suma de los diez primeros términos.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\, a_1 = 76 \\ \cdot\, a_{10} = 81 - 5\cdot 10 = 31. \end{array}\right\} S_{10} = \frac{76+31}{2}\cdot 10 = \underline{535}$$

suma sea igual a 1107? (●●○)

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

$a_n = 2 + (n-1)\cdot 3 = 2 + 3n - 3 = 3n - 1 \rightarrow a_n = 3n-1.$

Me piden que $S_n = 1107$:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 1107 \\ \bullet \text{ Calculamos } a_1 = 3\cdot 1 - 1 = 2. \end{array}\right\} \quad \frac{2 + a_n}{2} \cdot n = 1107.$$

Como $a_n = 3n-1 \longrightarrow \dfrac{2 + (3n-1)}{2} \cdot n = 1107 \longrightarrow \dfrac{3n+1}{2} \cdot n = 1107 \Rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{(3n+1)n}{2} = 1107 \rightarrow 3n^2 + n = 2214 \rightarrow 3n^2 + n - 2214 = 0.$

$$ax^2 + bx + c = 0 \longrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 3\cdot(-2214)}}{2\cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 26568}}{6} = \frac{-1 \pm 163}{6} \rightarrow$$

$\rightarrow \quad n_1 = \dfrac{-1+163}{6} = 27$

$n_2 = \dfrac{-1-163}{6} = \dfrac{-164}{6} = \cancel{\dfrac{-82}{3}}$ El n.º de elementos no puede ser negativo

Solución: n.º de elementos de la progresión, para que la suma sea 1107 tiene que ser 27.

41 En un triángulo cuyos ángulos están en progresión aritmética, ¿puedes asegurar que siempre tendrá un ángulo de 60°? (●●○)

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha \\ \alpha_2 = \alpha + d \\ \alpha_3 = \alpha + 2d \end{array}\right\}$$

Como la suma de los ángulos de un triángulo siempre es 180°:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180.$$

$\alpha + \alpha + d + \alpha + 2d = 180 \Rightarrow 3\alpha + 3d = 180 \Rightarrow$

$\rightarrow 3(\alpha + d) = 180 \rightarrow \alpha + d = 60 \rightarrow \alpha = 60 - d$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = 60 - d \\ \alpha_2 = 60 \\ \alpha_3 = 6 + d \end{array}\right\}$$ Siempre habrá uno de 60°

Si el tercer término de una progresión aritmética es 6 y el séptimo término 14 ¿Cuántos términos son necesarios para que la suma sea igual a 132?

$$\left\{\begin{array}{l} a_3 = 6 \\ a_7 = 14 \end{array}\right. \qquad a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\left.\begin{array}{l} n=3: \ 6 = a_1 + 2d \\ n= \ \ : 14 = a_1 + 7d \end{array}\right\} (-1) \rightarrow \begin{array}{r} -6 = \cancel{-a_1} - 2d \\ 14 = \cancel{a_1} + 6d \\ \hline 8 = \quad 4d \end{array} \Rightarrow d = \frac{8}{4} = 2.$$

Sustituyendo:

$$6 = a_1 + 2\cdot 2 \Rightarrow a_1 = 2.$$

Término general: $a_n = 2 + (n-1)2 = \cancel{2} + 2n - \cancel{2} = 2n$

$$\boxed{a_n = 2n}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \rightarrow 132 = \frac{2+2n}{2} \cdot n \rightarrow 132 \cdot 2 = (2+2n)\, n \rightarrow$$

$$\rightarrow 264 = 2n + 2n^2 \rightarrow \underbrace{2n^2}_{ax^2} \underbrace{+2n}_{+bx} \underbrace{-264}_{+c} = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$n = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot (-264)}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2116}}{4} = \frac{-2 \pm 46}{4} \begin{cases} \frac{-2+46}{4} = 11 \\ \frac{-2-46}{4} = \cancel{-12} \end{cases}$$

n no puede ser -12, porque $-12 \notin \mathbb{N}$

Solución: $n = 11 \rightarrow 11$ términos hay que sumar.