EXAMEN – Ecuaciones e inecuaciones

Ejercicio 1. (1 pto.)

Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

a) $2x^2 - 98 = 0$

b) $4x^2 + 40x = 0$

$b = 0; despejar\ directamente$

$$a)\ 2x^2 - 98 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 98 \Rightarrow x^2 = \frac{98}{2} = 49$$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{49} \Rightarrow$Dos soluciones: $\mathbf{x_1 = -7}$ y $\mathbf{x_2 = 7}$

Comprobación: $x_1 = -7 \Leftrightarrow 2(-7)^2 - 98 = 0 \Leftrightarrow 98 - 98 = 0$

$x_2 = 7 \Leftrightarrow 2(7)^2 - 98 = 0 \Leftrightarrow 98 - 98 = 0$

$c = 0; sacar\ factor\ común$

$$b)\ 4x^2 + 40x \Rightarrow 4x\ (x + 10) \Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ (x + 10) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -10 \end{cases}$$

Dos soluciones: $\mathbf{x_1 = 0}$ y $\mathbf{x_2 = -10}$

Comprobación: $x_1 = 0 \Leftrightarrow 4(0)^2 + 40 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

$x_2 = -10 \Leftrightarrow 4(-10)^2 + 40 \cdot -10 = 0 \Leftrightarrow 400 - 400 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

Recuerda que la ecuación es incompleta cuando en la expresión $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ ó } c = 0$ y se puede resolver mediante despeje o factorización.

Ejercicio 2. (1 pto.)

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 2x - 8 = -2(x + 3) + 10$

b) $\dfrac{x - 6}{2x - 5} = -x$

Recuerda que las ecuaciones de segundo grado son de la forma:
$ax^2 + bx + c$ *, con* $a \neq 0$*. Y se resuelven mediante la fórmula:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se simplifica la expresión al máximo hasta tener la forma $ax^2 + bx + c = 0$ *y se aplica la fórmula. Recuerda que al pasar un término al otro lado de la igualdad pasa realizando la operación inversa; es decir, si está sumando pasa restando, o si está dividiendo pasa multiplicando, y viceversa.*

a) $x^2 + 2x - 8 = -2(x + 3) + 10 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = -2x - 6 + 10 \Rightarrow$
$x^2 + 2x - 8 + 2x + 6 - 10 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0$ *Aplicando fórmula*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1(-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 8}{2}$$

Dos soluciones: $\mathbf{x_1 = -6}$ y $\mathbf{x_2 = 2}$

Comprobación:

$x_1 = -6 \Leftrightarrow (-6)^2 + 2(-6) - 8 = -2(-6 + 3) + 10 \Leftrightarrow 36 - 12 - 8 = 6 + 10$
$\Leftrightarrow 16 = 16$
$x_2 = 2 \Leftrightarrow (2)^2 + 2 \cdot 2 - 8 = -2(2 + 3) + 10 \Leftrightarrow 4 + 4 - 8 = -2 \cdot 5 + 10 \Leftrightarrow 0 = 0$

b) $\dfrac{x - 6}{2x - 5} = -x \Rightarrow x - 6 = -x(2x - 5) \Rightarrow x - 6 = -2x^2 + 5x$
$\Rightarrow x - 6 + 2x^2 - 5x = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0$ *Aplicando fórmula*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2(-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 2}$$
$$= \frac{4 \pm 8}{4}$$

Dos soluciones: $\mathbf{x_1 = -1}$ y $\mathbf{x_2 = 3}$

Comprobación:

$x_1 = -1 \Leftrightarrow \dfrac{-1 - 6}{2 \cdot (-1) - 5} = -(-1) \Leftrightarrow \dfrac{-7}{-7} = -(-1) \Leftrightarrow 1 = 1$

$x_2 = 3 \Leftrightarrow \dfrac{3-6}{2\cdot(3)-5} = -(3) \Leftrightarrow \dfrac{-3}{6-5} = -3 \Leftrightarrow -3 = -3$

Ejercicio 3. (2 pto.)

Resuelve estas ecuaciones:

a) $(x^2+3x-4)(x+2)x=0$

b) $\sqrt{x+5}-3=x$

a) $(x^2+3x-4)(x+2)x=0$

La ecuación factorizada se resuelve haciendo cada factor igual a 0.

$x^2+3x-4=0$ *Aplicando fórmula*

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1(-4)}}{2\cdot 1}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1}=\frac{-3\pm 5}{2}$$

$\mathbf{x_1=-4}$ y $\mathbf{x_2=1}$

$x+2=0 \Rightarrow \mathbf{x_3=-2}$

$\mathbf{x_4=0}$

Comprobación:

$x_1=-4 \Leftrightarrow ((-4)^2+3(-4)-4)(-4+2)(-4)=0 \Leftrightarrow (0)(-2)(-4)=0 \Leftrightarrow\ 0=0$
$x_2=1 \Leftrightarrow ((1)^2+3(1)-4)(1+2)(1)=0 \Leftrightarrow (0)(3)(1)=0 \Leftrightarrow\ 0=0$
$x_3=-2 \Leftrightarrow ((-2)^2+3(-2)-2)(-2+2)(-2)=0 \Leftrightarrow (-4)(0)(-2)=0 \Leftrightarrow\ 0=0$
$x_4=0 \Leftrightarrow ((0)^2+3(0)-0)(0+2)(0)=0 \Leftrightarrow (0)(2)(0)=0 \Leftrightarrow\ 0=0$

Aislar el radical *Elevar al cuadrado para eliminarlo*

b) $\sqrt{x+5}-3=x \ \Rightarrow \sqrt{x+5}=x+3 \Rightarrow \left(\sqrt{x+5}\right)^2=(x+3\,)^2$

$\Rightarrow x+5=x^2+6x+9 \Rightarrow x^2+6x+9-x-5=0 \Rightarrow x^2+5x+4=0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 1(4)}}{2\cdot 1}=\frac{-5\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}=\frac{-5\pm 3}{2}$$

$x_1=-4$ y $x_2=-1$ soluciones posibles

Comprobación:

$x_1 = -4 \Leftrightarrow \sqrt{-4+5} - 3 = -4 \Leftrightarrow \sqrt{1} - 3 = -4 \Leftrightarrow -2 \neq -4$ no es válida

$x_2 = -1 \Leftrightarrow \sqrt{-1+5} - 3 = -1 \Leftrightarrow \sqrt{4} - 3 = -1 \Leftrightarrow -1 = -1$ válida

Solo una solución: $\mathbf{x = -1}$

Para resolver la ecuación con radical, hay que aislar el radical, elevar al cuadrado para eliminarlo, resolver la ecuación resultante y por último comprobar soluciones. En estos casos siempre hay que comprobar la solución pues existe una tendencia a que alguna de las posibles soluciones no sea válida para el radical.

Ejercicio 4. (2 ptos.)

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método que consideres más adecuado:

$$\begin{cases} y = 3 - x \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$$

Método de sustitución

$$\begin{cases} y = 3 - x \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$$

La **y** ya está despejada en la primera ecuación, sustituir en la segunda ecuación:

$$2x - 4(3 - x) = 6 \Rightarrow 2x - 12 + 4x = 6 \Rightarrow 2x + 4x = 6 + 12 \Rightarrow$$

$$6x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{6} = 3$$

Sustituyendo $\mathbf{x = 3}$ en la primera ecuación: $y = 3 - x = 3 - 3 = 0$

Comprobación: $\begin{cases} 0 = 3 - 3 \\ 2 \cdot 3 - 4 \cdot 0 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 6 = 6 \end{cases}$

Solución: $(\mathbf{3}; \mathbf{0})$

Ejercicio 5. (2 ptos.)

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones no lineales, emplea el método que consideres más adecuado:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x^2 - y^2 = 12 \end{cases}$$

Método de reducción

Sumando

$$\begin{cases} x^2 + \cancel{y^2} = 20 \\ x^2 - \cancel{y^2} = 12 \end{cases}$$

$$2x^2 \quad = 32 \Rightarrow x^2 = \frac{32}{2} = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} \Rightarrow x_1 = -4$$

$$x_2 = 4$$

Sustituyendo $x_1 = -4$ en la primera segunda ecuación:

$$(-4)^2 - y^2 = 12 \Rightarrow 16 - 12 = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4} \Rightarrow y_1 = -2;\; y_2 = 2$$

Sustituyendo $x_2 = 4$ en la primera segunda ecuación:

$$(4)^2 - y^2 = 12 \Rightarrow 16 - 12 = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4} \Rightarrow y_3 = -2;\; y_4 = 2$$

Se obtienen cuatro soluciones para el sistema de ecuaciones:

$$\Rightarrow \mathbf{(-4; -2); (-4; 2);\; (4; -2);\; (4; 2)}$$

Los sistemas de ecuaciones no lineales son aquellos que tienen una o dos ecuaciones que son no lineales y se resuelven esencialmente de igual modo a los lineales.

Si hay raíces o incógnitas en el denominador pueden aparecer soluciones falsas al sistema y en esos casos es necesario comprobar todas las soluciones en el sistema inicial.

Ejercicio 6. (2 ptos.)

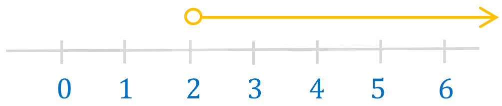
Resuelve el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 2 - y > 8 - 4y \\ 2y + 1 \geq 3y - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 - y > 8 - 4y \\ 2y + 1 \geq 3y - 4 \end{cases}$$

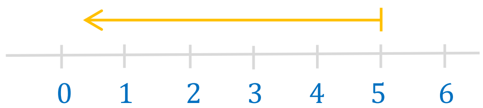
Se resuelve cada inecuación de forma independiente. La solución es un intervalo donde se hace cierta la desigualdad.

$$2 - y > 8 - 4y \Rightarrow -y + 4y > 8 - 2 \Rightarrow 3y > 6 \Rightarrow y > 2$$

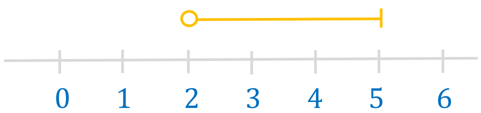


$$2y + 1 \geq 3y - 4 \Rightarrow 2y - 3y \geq -4 - 1 \Rightarrow -y \geq -5$$

Al multiplicar o dividir los dos miembros de una inecuación por un número negativo, la desigualdad cambia de sentido: $y \leq 5$



La solución del sistema son los valores que cumplen ambas inecuaciones:



Solución: $\mathbf{2 < y \leq 5}$