1. Contesta a los siguientes apartados.

   a) **[1 punto]** El ángulo α es desconocido, pero se sabe $270^o < \alpha < 360^o$, y que $\frac{1}{\cos\alpha} = 3$, halla el **valor exacto, racionalizado y simplificado** de $\text{sen}\,\alpha$ y de $\text{tg}\,\alpha$.

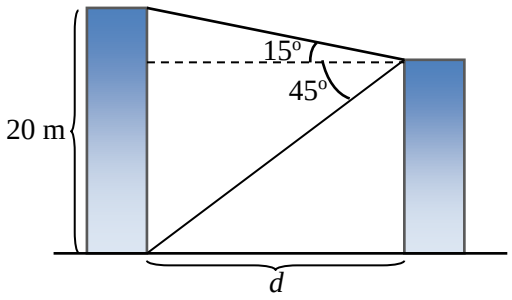
   b) **[1 punto]** Halla el **valor exacto** de $\cos 1950^o$, expresándolo como una razón del primer cuadrante.

   c) **[1 punto]** Sabiendo que $\text{sen}\,\alpha = 0,41$ y que $0^o < \alpha < 90^o$ halla, de manera razonada, $\text{sen}\left(90^o - \alpha\right)$ y $\text{sen}\left(360^o - \alpha\right)$, sin calcular previamente el valor del ángulo α.

2. Contesta a los siguientes apartados sobre triángulos.
   a) **[1,5 puntos]** En un triángulo rectángulo uno de los ángulos agudos es de 32º y uno de los catetos mide 16 cm. Hallar el otro ángulo, la hipotenusa y el área del triángulo.
   b) **[1,5 puntos]** En un triángulo se conoce la longitud de dos lados, $a = 24$ cm y $b = 10$ cm, y el ángulo que forman ambos: $C = 60^o$. Hallar la longitud del tercer lado, los otros dos ángulos y el área del triángulo.

Problemas

3. **[2 puntos]** La altura de una casa es de 20 metros. Desde la parte superior de otro edificio, el ángulo de elevación con el que se ve la parte superior de la primera casa es de 15^o y el ángulo de depresión de su parte inferior es de 45^o. Hallar la distancia d entre las dos casas. (Ver figura de la derecha).



4. **[2 puntos]** Las diagonales de un paralelogramo miden 5 y 6 centímetros respectivamente. Ambas se cortan bajo un ángulo de 50º. Halla el perímetro del paralelogramo.

Soluciones

1. Contesta a los siguientes apartados.

   a) **[1 punto]** El ángulo α es desconocido, pero se sabe $270^o < \alpha < 360^o$, y que $\frac{1}{\cos\alpha} = 3$, halla el **valor exacto, racionalizado y simplificado** de $\text{sen}\,\alpha$ y de $\text{tg}\,\alpha$.

   $\frac{1}{\cos\alpha} = 3 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{9}$. Como $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, tenemos:

   $\text{sen}^2\alpha + \frac{1}{9} = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{8}{9} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (el signo es negativo porque el ángulo se encuentra en el cuarto cuadrante). $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-2\sqrt{2}/3}{1/3} = -2\sqrt{2}$.

   b) **[1 punto]** Halla el **valor exacto** de $\cos 1950^o$, expresándolo como una razón del primer cuadrante.

   Dividiendo 1950^o entre 360^o se obtiene $1950^o = 5 \cdot 360^o + 150^o$. Por tanto,

   $\cos 1950^o = \cos 150^o = -\cos 30^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\cos 150^o = -\cos 30^o$ porque 150^o y 30^o son suplementarios).

   c) **[1 punto]** Sabiendo que $\text{sen}\,\alpha = 0,41$ y que $0^o < \alpha < 90^o$ halla, de manera razonada, $\text{sen}(90^o - \alpha)$ y $\text{sen}(360^o - \alpha)$, sin calcular previamente el valor del ángulo α.

   $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 0,41^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - 0,41^2 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - 0,41^2} \Rightarrow \cos\alpha = 0,91$.

   - α y $90^o - \alpha$ son complementarios, luego $\text{sen}(90^o - \alpha) = \cos\alpha = 0,91$.
   - $360^o - \alpha$ y $-\alpha$ tienen las mismas razones trigonométricas, y como $-\alpha$ y α son opuestos se tiene que $\text{sen}(360^o - \alpha) = \text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha = -0,41$.

2. Contesta a los siguientes apartados sobre triángulos.

   a) **[1,5 puntos]** En un triángulo rectángulo uno de los ángulos agudos es de 32º y uno de los catetos mide 16 cm. Hallar el otro ángulo, la hipotenusa y el área del triángulo.

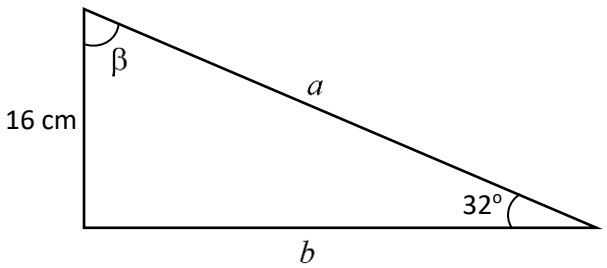
   Si llamamos $\alpha = 32^o$ y β al otro ángulo agudo, entonces: $\beta = 90^o - 32^o = 58^o$. Ahora hay dos casos, dependiendo de dónde situemos el cateto (o bien opuesto a 32^o, o bien contiguo a 32^o):

   - **Caso 1**

     $\text{sen}\,32^o = \frac{16}{a} \Rightarrow a = \frac{16}{\text{sen}\,32^o} \Rightarrow a = 30,19$ cm.

     $\text{tg}\,32^o = \frac{16}{b} \Rightarrow b = \frac{16}{\text{tg}\,32^o} \Rightarrow b = 25,61$ cm.

     Área: $A = \frac{16 \cdot 25,61}{2} = 204,88$ cm².

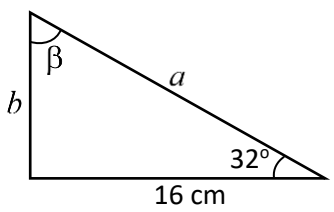
     

   - **Caso 2**

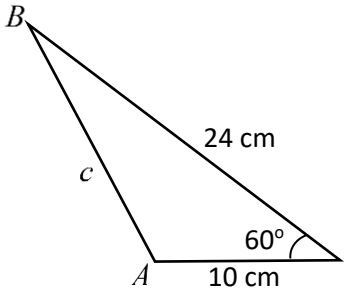
     $\cos 32^o = \frac{16}{a} \Rightarrow a = \frac{16}{\cos 32^o} \Rightarrow a = 18,87$ cm.

     $\text{tg}\,32^o = \frac{b}{16} \Rightarrow b = 16 \cdot \text{tg}\,32^o \Rightarrow b = 10$ cm.

     Área: $A = \frac{16 \cdot 10}{2} = 80$ cm².

b) **[1,5 puntos]** En un triángulo se conoce la longitud de dos lados, $a = 24$ cm y $b = 10$ cm, y el ángulo que forman ambos: $C = 60^\circ$. Hallar la longitud del tercer lado, los otros dos ángulos y el área del triángulo.



Por el teorema del coseno: $c^2 = 10^2 + 24^2 - 2 \cdot 10 \cdot 24 \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow c^2 = 436 \Rightarrow c = 20,88$ cm.

Por el teorema de los senos: $\dfrac{20,88}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \dfrac{10}{\operatorname{sen} B} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen} B = \dfrac{10 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ}{20,88} = 0,41 \Rightarrow B = 24,5^\circ$.

El ángulo A será $A = 180^\circ - 60^\circ - 24,5^\circ = 95,5^\circ$

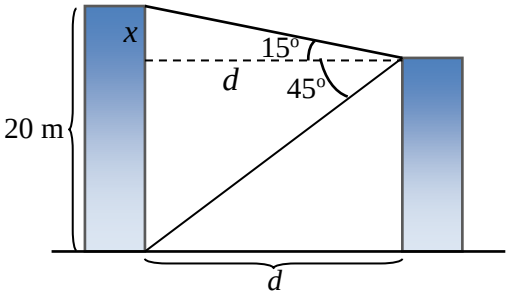
Y el área S del triángulo es $S = \dfrac{1}{2} \cdot 24 \cdot 10 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = 103,92$ cm^2.

Nota importante. Si se calcula en primer lugar el ángulo A usando el teorema de los senos (de la misma forma que hemos calculado primero B), se obtiene otra solución distinta. Es decir, el problema tiene dos soluciones. Además, en los dos casos el área del triángulo es la misma.

3. **[2 puntos]** La altura de una casa es de 20 metros. Desde la parte superior de otro edificio, el ángulo de elevación con el que se ve la parte superior de la primera casa es de 15° y el ángulo de depresión de su parte inferior es de 45°. Hallar la distancia d entre las dos casas. (Ver figura de la derecha).

Usando los triángulos ABD y BDC podemos establecer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 15^\circ = \dfrac{x}{d} \\ \operatorname{tg} 45^\circ = \dfrac{20-x}{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \dfrac{x}{\operatorname{tg} 15^\circ} \\ d = \dfrac{20-x}{\operatorname{tg} 45^\circ} = 20 - x \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{\operatorname{tg} 15^\circ} = 20 - x \Rightarrow$$

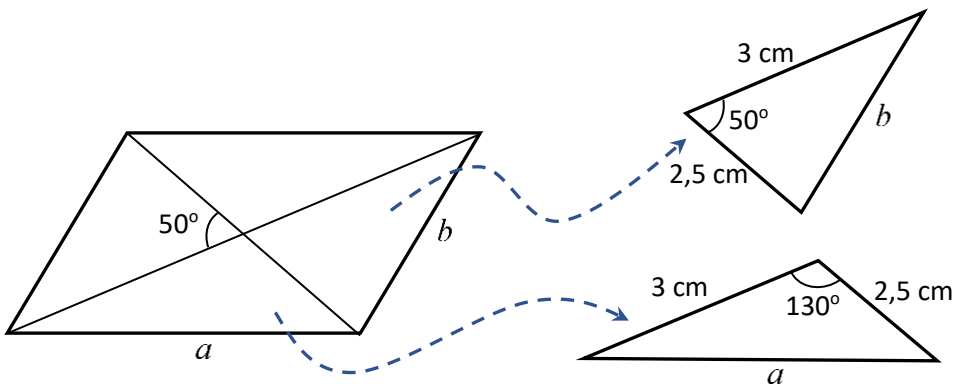


$$\Rightarrow x = 0,27 \cdot (20 - x) \Rightarrow x = 5,4 - 0,27x \Rightarrow x + 0,27x = 5,4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,27x = 5,4 \Rightarrow x = 4,25 .$$

Por tanto, $d = \dfrac{x}{\operatorname{tg} 15^\circ} \Rightarrow d = \dfrac{4,25}{0,27} \Rightarrow d = 15,74$ metros.

4. **[2 puntos]** Las diagonales de un paralelogramo miden 5 y 6 centímetros respectivamente. Ambas se cortan bajo un ángulo de 50º. Halla el perímetro del paralelogramo.



Según la figura, por el teorema del coseno: $\begin{cases} b^2 = 2,5^2 + 3^2 - 2 \cdot 2,5 \cdot 3 \cdot \cos 50^\circ = 5,61 \Rightarrow b = 2,37 \text{ cm}. \\ a^2 = 2,5^2 + 3^2 - 2 \cdot 2,5 \cdot 3 \cdot \cos 130^\circ = 24,89 \Rightarrow a = 4,99 \text{ cm}. \end{cases}$

Por tanto, el perímetro P del paralelogramo es $P = 2a + 2b = 2 \cdot 2,37 + 2 \cdot 4,99 = 14,72$ cm.