1. **[2 puntos]** Partiendo de que α y β son ángulos desconocidos, contesta a las siguientes cuestiones:

   a) Sabiendo que un ángulo α se encuentra en el tercer cuadrante y que $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{5}}=\frac{1}{2}$, halla el valor exacto, racionalizado y simplificado de $\operatorname{sen}\alpha$ y de $\cos\alpha$.

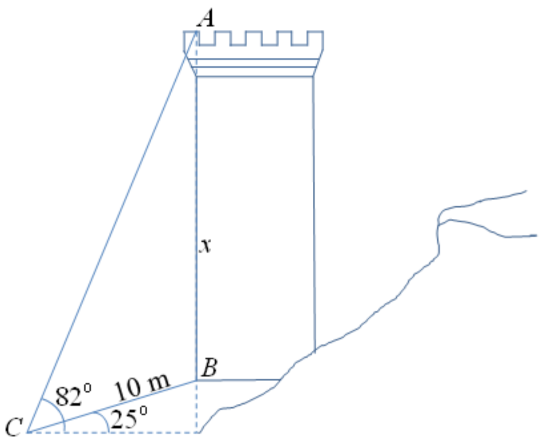
   b) Sea $\cos\beta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$, y $90^\circ<\beta<180^\circ$. Calcular el valor exacto, racionalizado y simplificado de $\operatorname{sen}\beta$ y $\operatorname{tg}\beta$.

2. **[2 puntos]** Supongamos que α es un ángulo desconocido del primer cuadrante, tal que $\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{3}$. Calcula, de manera razonada, el valor exacto de las siguientes razones trigonométricas.

   a) $\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)$; b) $\cos(180^\circ-\alpha)$

3. **[2 puntos]** Desde un punto a ras de suelo se ve la azotea de un edificio con un ángulo de elevación de 48°. Avanzando 20 metros en dirección al edificio, el ángulo de elevación se incrementa en 14°. Calcular la altura del edificio.

4. **[2 puntos]** Un pasillo plano de 10 metros de largo y que forma un ángulo de 25° con la horizontal, conduce al pie de una gran torre. Calcular la altura x de ésta, sabiendo que desde el inicio del pasillo el ángulo de elevación de su punto más alto es de 82°. Ayúdate de la figura de la derecha.



5. **[1 punto]** Demuestra que la siguiente identidad es cierta: $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}$.

6. **[1 punto]** Teniendo en cuenta que $\sec x=\frac{1}{\cos x}$, simplifica todo lo que puedas la expresión siguiente: $\frac{\sec^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$.

Soluciones

1. **[2 puntos]** Partiendo de que α y β son ángulos desconocidos, contesta a las siguientes cuestiones:

   a) Sabiendo que un ángulo α se encuentra en el tercer cuadrante y que $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2}$, halla el <u>valor exacto, racionalizado y simplificado</u> de $\operatorname{sen}\alpha$ y de $\cos\alpha$.

   De la igualdad conocida $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2}$, deducimos despejando que $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Sustituyendo este último valor en la igualdad $\operatorname{tg}^2\alpha+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, tenemos: $\dfrac{5}{4}+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\dfrac{9}{4}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\cos^2\alpha=\dfrac{4}{9}\Rightarrow\cos\alpha=-\dfrac{2}{3}$.

   Se toma la solución negativa porque el ángulo α se encuentra en el tercer cuadrante y, en este cuadrante, el coseno es negativo. Finalmente, como $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, entonces $\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

   b) Siendo $\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, con $90^\circ<\beta<180^\circ$, calcular el <u>valor exacto</u> de $\operatorname{sen}\beta$ y $\operatorname{tg}\beta$.

   Usando la fórmula fundamental de la trigonometría:

   $$\operatorname{sen}^2\beta+\cos^2\beta=1\Rightarrow\operatorname{sen}^2\beta+\frac{5}{9}=1\Rightarrow\operatorname{sen}^2\beta=1-\frac{5}{9}\Rightarrow\operatorname{sen}^2\beta=\frac{4}{9}\Rightarrow\operatorname{sen}\beta=\frac{2}{3}$$

   Se ha tomado la solución positiva porque $90^\circ<\beta<180^\circ$ o, lo que es lo mismo, porque el ángulo β se encuentra en el segundo cuadrante, en el cual el seno es positivo.

   Finalmente: $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}\Rightarrow\operatorname{tg}\beta=\dfrac{2/3}{-\sqrt{5}/3}\Rightarrow\operatorname{tg}\beta=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

2. **[2 puntos]** Supongamos que α es un ángulo <u>desconocido</u> del primer cuadrante, tal que $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{1}{3}$. Calcula, de manera razonada, el <u>valor exacto</u> de las siguientes razones trigonométricas.

   Antes de nada, haciendo uso de la igualdad fundamental de la trigonometría, tenemos:

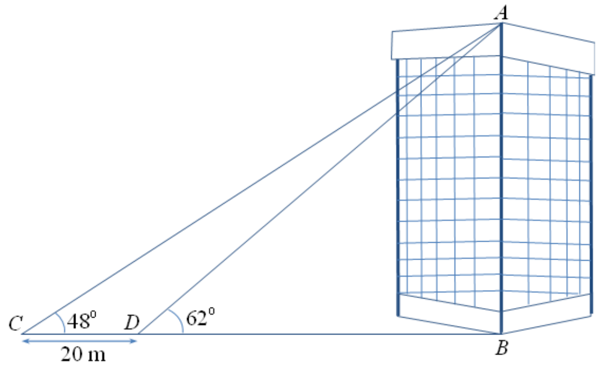
   $$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\frac{1}{9}+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\cos^2\alpha=1-\frac{1}{9}\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{8}{9}\Rightarrow$$

   $\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{8}}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ Hemos tomado la solución negativa porque el ángulo α se encuentra en el primer cuadrante, donde el coseno es siempre positivo.

   a) $\operatorname{tg}\left(90^\circ-\alpha\right)=\dfrac{\operatorname{sen}\left(90^\circ-\alpha\right)}{\cos\left(90^\circ-\alpha\right)}=\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\dfrac{2\sqrt{2}/3}{1/3}=2\sqrt{2}$ ($90^\circ-\alpha$ y α son ángulos complementarios).

   b) $\cos\left(180^\circ-\alpha\right)=-\cos\alpha=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ($180^\circ-\alpha$ y α son ángulos suplementarios).

3. **[2 puntos]** Desde un punto a ras de suelo se ve la azotea de un edificio con un ángulo de elevación de 48°. Avanzando 20 metros en dirección al edificio, el ángulo de elevación se incrementa en 14°. Calcular la altura del edificio.



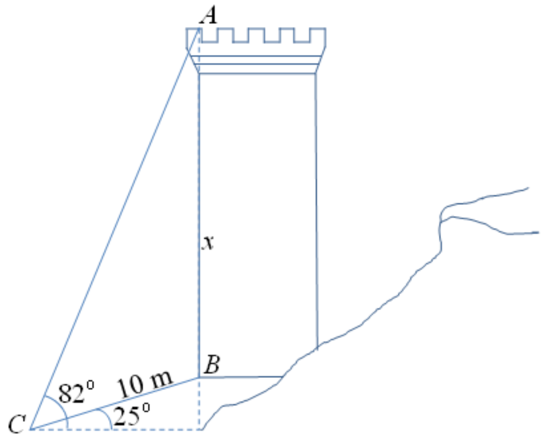
Observando la figura de la derecha es fácil darse cuenta de que el ángulo D es $180^{\circ}-62^{\circ}=118^{\circ}$ y que, por tanto, el ángulo A es $180^{\circ}-118^{\circ}-48^{\circ}=14^{\circ}$.

Aplicando el teorema de los senos en el triángulo ACD tenemos:

$$\frac{AC}{\operatorname{sen}118^{\circ}}=\frac{20}{\operatorname{sen}14^{\circ}}\Rightarrow AC=\frac{20\cdot\operatorname{sen}118^{\circ}}{\operatorname{sen}14^{\circ}}\cong 73\,\text{m}.$$

Como $\operatorname{sen}48^{\circ}=\dfrac{AB}{AC}$, entonces $AB=AC\cdot\operatorname{sen}48^{\circ}$, con lo que la altura AB del edificio es: $AB=AC\cdot\operatorname{sen}48^{\circ}=73\cdot\operatorname{sen}48^{\circ}\cong 54,25$ m.

4. **[2 puntos]** Un pasillo plano de 10 metros de largo y que forma un ángulo de 25° con la horizontal, conduce al pie de una gran torre. Calcular la altura x de ésta, sabiendo que desde el inicio del pasillo el ángulo de elevación de su punto más alto es de 82°. Ayúdate de la figura de la derecha.



El ángulo C es, según la figura, igual a $82^{\circ}-25^{\circ}=57^{\circ}$; y el ángulo A es igual a $90^{\circ}-82^{\circ}=8^{\circ}$. Aplicando el teorema de los senos en el triángulo ABC tenemos:

$$\frac{10}{\operatorname{sen}8^{\circ}}=\frac{x}{\operatorname{sen}57^{\circ}}\Rightarrow x=\frac{10\cdot\operatorname{sen}57^{\circ}}{\operatorname{sen}8^{\circ}}\cong 60,26\,\text{m}$$

O sea, que la altura de la torre es de $60,26$ metros.

5. **[1 punto]** Demuestra que la siguiente identidad es cierta: $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}$

$$\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}=\frac{\operatorname{sen}x\cos x+\cos x\operatorname{sen}x}{\cos x\cdot\cos y}=\frac{\operatorname{sen}x\cancel{\cos y}}{\cos x\cdot\cancel{\cos y}}+\frac{\cancel{\cos x}\operatorname{sen}y}{\cancel{\cos x}\cdot\cos y}=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+\frac{\operatorname{sen}y}{\cos y}=\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y$$

6. **[1 punto]** Teniendo en cuenta que $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$, simplifica todo lo que puedas la expresión siguiente: $\dfrac{\sec^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$.

$$\frac{\sec^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{1-\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}\left(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x\right)}=\frac{1}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}=\frac{1}{\cos 2x}=\sec 2x.$$