1. **[2 puntos]** Partiendo de que x y α son ángulos desconocidos, contesta a las siguientes cuestiones:

   a) El ángulo x se encuentra en el segundo cuadrante. Se sabe además que $\dfrac{\cos x}{\sqrt{5}} = -\dfrac{1}{3}$. Hallar el valor exacto, racionalizado y simplificado de $\operatorname{sen} x$ y de $\operatorname{tg} x$.

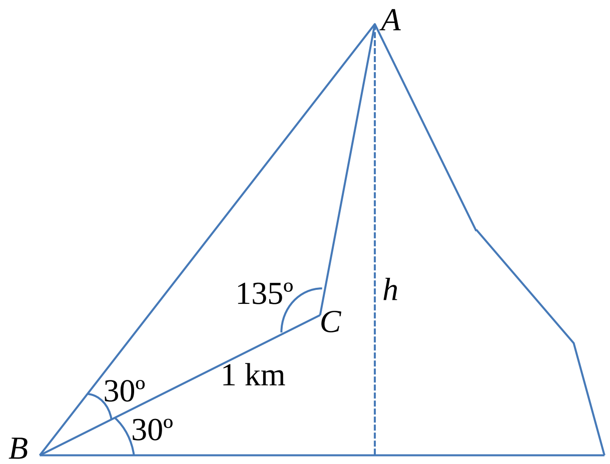
   b) Sea $\dfrac{4}{\operatorname{tg}^2\alpha} = 5$, y $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Hallar el valor exacto, racionalizado y simplificado de $\operatorname{sen}\alpha$ y de $\cos\alpha$.

2. **[2 puntos]** Supongamos que α es un ángulo desconocido del primer cuadrante, tal que $\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$. Calcula, de manera razonada, el valor exacto de las siguientes razones trigonométricas:

   a) $\operatorname{tg}(-\alpha)$; b) $\cos(180^\circ - \alpha)$

3. **[2 puntos]** El lado desigual de un triángulo isósceles mide 20 metros y el ángulo opuesto 74°. Calcula la longitud de los lados iguales y la superficie del triángulo. Utiliza un dibujo para hacer el problema.

4. **[2 puntos]** Desde un punto B que está en la base de una montaña, se ve su cima A con un ángulo de elevación de 60°. Después de caminar hacia arriba un kilómetro hasta otro punto C, en dirección hacia la cima, subiendo por un plano que forma 30° con el plano horizontal, se observa que el ángulo C es de 135°. Hallar la altura de la montaña. Ayúdate de la figura de la derecha.



5. **[1 punto]** Demuestra que la siguiente identidad es cierta: $\dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x} = 2\operatorname{tg}^2 x$.

6. **[1 punto]** Teniendo en cuenta que $\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, simplifica todo lo que puedas la expresión siguiente:

   $$\frac{2\cos(45^\circ + \alpha)\cdot\cos(45^\circ - \alpha)}{\cos 2\alpha}.$$

Soluciones

1. **[2 puntos]** Partiendo de que x y α son ángulos desconocidos, contesta a las siguientes cuestiones:

   a) El ángulo x se encuentra en el segundo cuadrante. Se sabe además que $\frac{\cos x}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{3}$. Hallar el <u>valor exacto, racionalizado y simplificado</u> de $\operatorname{sen} x$ y de $\operatorname{tg} x$.

   $\frac{\cos x}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$. Como $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, entonces $\operatorname{sen}^2 x + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + \frac{5}{9} = 1 \Rightarrow$

   $\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \frac{5}{9} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{4}{9} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$. Finalmente calculamos la tangente: $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

   Entonces: $\operatorname{tg} x = \frac{2/3}{-\sqrt{5}/3} = -\frac{\cancel{3} \cdot 2}{\cancel{3} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

   b) Sea $\frac{4}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = 5$, y $0^\text{o} < \alpha < 90^\text{o}$. Hallar el <u>valor exacto, racionalizado y simplificado</u> de $\operatorname{sen} \alpha$ y de $\cos \alpha$.

   $\frac{4}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = 5 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Además, $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$.

   Como $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{9}{5} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

   Finalmente $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2 \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot 3} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{3}$.

2. **[2 puntos]** Supongamos que α es un ángulo <u>desconocido</u> del primer cuadrante, tal que $\cos \alpha = \frac{2}{5}$. Calcula, de manera razonada, el <u>valor exacto</u> de las siguientes razones trigonométricas:

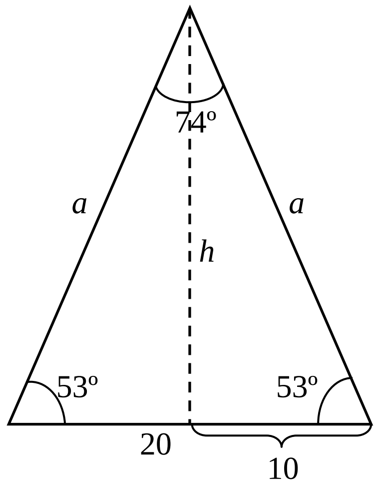
   $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{21}{25}} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

   $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{21}/\cancel{5}}{2/\cancel{5}} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

   a) Por ser α y $-\alpha$ ángulos opuestos: $\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{2}$.

   b) Por ser α y $180^\text{o} - \alpha$ ángulos suplementarios: $\cos(180^\text{o} - \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{2}{5}$.

3. **[2 puntos]** El lado desigual de un triángulo isósceles mide 20 metros y el ángulo opuesto 74^o. Calcula la longitud de los lados iguales y la superficie del triángulo. Utiliza un dibujo para hacer el problema.

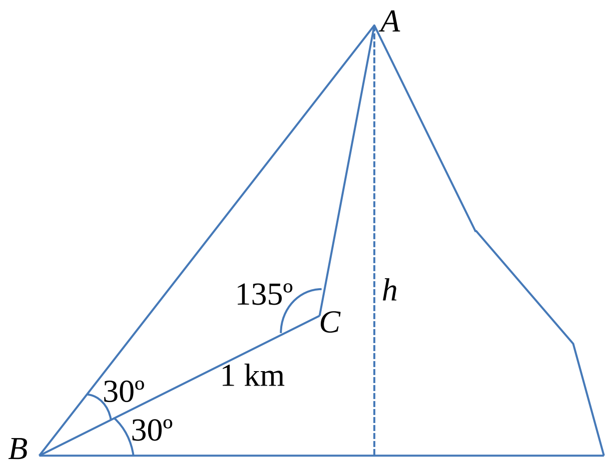


   $\cos 53^\text{o} = \frac{10}{a} \Rightarrow a = \frac{10}{\cos 53^\text{o}} \Rightarrow a = 16,62$ metros.

   $\operatorname{tg} 53^\text{o} = \frac{h}{10} \Rightarrow h = 10 \cdot \operatorname{tg} 53^\text{o} \Rightarrow h = 13,27$ metros.

   Por tanto, el área A del triángulo es: $A = \frac{20 \cdot 13,27}{2} \Rightarrow A = 132,7$ m².

4. **[2 puntos]** Desde un punto B que está en la base de una montaña, se ve su cima A con un ángulo de elevación de 60°. Después de caminar hacia arriba un kilómetro hasta otro punto C, en dirección hacia la cima, subiendo por un plano que forma 30° con el plano horizontal, se observa que el ángulo C es de 135°. Hallar la altura de la montaña. Ayúdate de la figura de la derecha.



En el triángulo ABC, por el teorema de los senos:

$$\frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}135^{\circ}}=\frac{1}{\operatorname{sen}15^{\circ}}\Rightarrow \overline{AB}=\frac{\operatorname{sen}135^{\circ}}{\operatorname{sen}15^{\circ}}\Rightarrow \overline{AB}=2,732 \text{ km.}$$

Por tanto:

$$\operatorname{sen}60^{\circ}=\frac{h}{\overline{AB}}\Rightarrow h=\overline{AB}\cdot\operatorname{sen}60^{\circ}=2,732\cdot\operatorname{sen}60^{\circ}\Rightarrow h=2,37 \text{ km.}$$

5. **[1 punto]** Demuestra que la siguiente identidad es cierta: $\dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 x+\cos 2x}=2\operatorname{tg}^2 x$.

$$\frac{1-\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 x+\cos 2x}=\frac{1-\left(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x\right)}{\cancel{\operatorname{sen}^2 x}+\cos^2 x-\cancel{\operatorname{sen}^2 x}}=\frac{1-\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=\frac{2\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=2\operatorname{tg}^2 x$$

6. **[1 punto]** Teniendo en cuenta que $\cos 45^{\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, simplifica todo lo que puedas la expresión siguiente:

$$\frac{2\cos\left(45^{\circ}+\alpha\right)\cdot\cos\left(45^{\circ}-\alpha\right)}{\cos 2\alpha}.$$

$$\frac{2\cos\left(45^{\circ}+\alpha\right)\cdot\cos\left(45^{\circ}-\alpha\right)}{\cos 2\alpha}=\frac{2\left(\cos 45^{\circ}\cos\alpha-\operatorname{sen}45^{\circ}\operatorname{sen}\alpha\right)\cdot\left(\cos 45^{\circ}\cos\alpha+\operatorname{sen}45^{\circ}\operatorname{sen}\alpha\right)}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=$$

$$=\frac{2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\alpha\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\alpha\right)}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha\right)\cdot\left(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\right)}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=$$

$$=\frac{2\cdot\frac{2}{4}\cdot\cancel{\left(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha\right)}}{\cancel{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}}=2\cdot\frac{2}{4}=\frac{4}{4}=1.$$