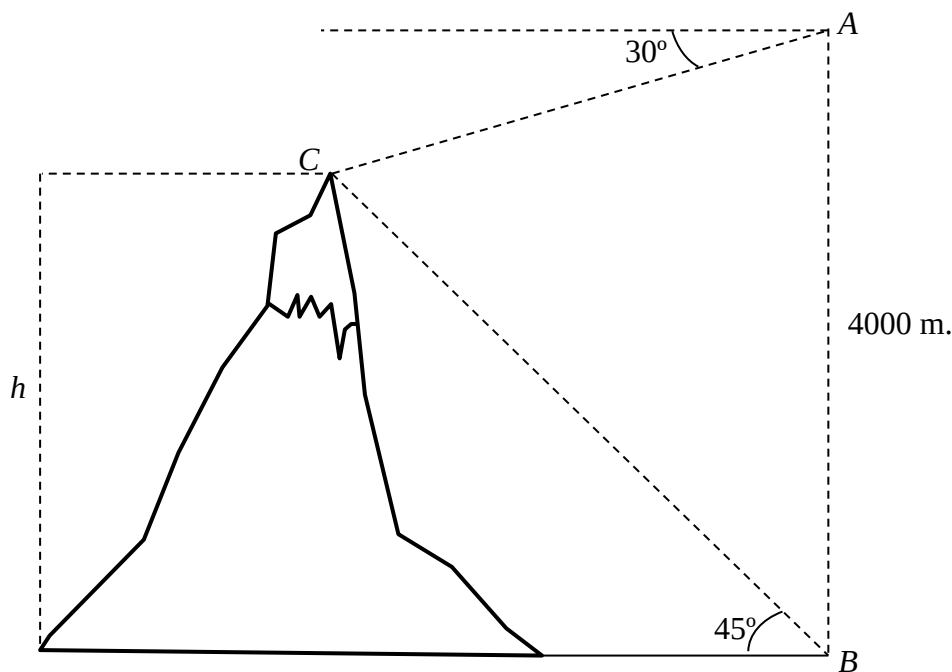


1. **[1 punto]** El ángulo x es desconocido, pero se sabe que se encuentra en el primer cuadrante. Se sabe además que $\frac{4}{\operatorname{tg}^2 x} = 5$. Hallar el valor exacto, racionalizado y simplificado de $\operatorname{sen} x$ y de $\cos x$.
2. **[1 punto]** Utilizando las medidas del siguiente dibujo, halla la altura h de la montaña.



3. **[1,5 puntos]** Un avión que vuela a 3000 metros de altura, en un instante determinado, ve un pueblo A bajo un ángulo de 40° con respecto a la horizontal de vuelo (ángulo de depresión) y otro pueblo B bajo un ángulo de 15° . ¿Qué distancia hay entre A y B ? Realiza un dibujo adecuado donde se represente esta situación.
4. **[1 punto]** Demuestra que es cierta la siguiente identidad: $\frac{1 - \cos 2x}{\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x} = 2 \operatorname{tg}^2 x$
5. **[1 punto]** Simplifica de manera razonada, paso a paso, la expresión siguiente: $\frac{2 \cos(45^\circ + \alpha) \cdot \cos(45^\circ - \alpha)}{\cos 2\alpha}$
6. **[2 puntos]** Resolver la siguiente ecuación trigonométrica y el siguiente sistema de ecuaciones trigonométricas, dando las soluciones que se encuentren en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$ (las del sistema darlas solamente en el primer cuadrante).

$$\text{a) } \cos 2x + \cos x \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x + 1 \quad ; \quad \text{b) } \begin{cases} \operatorname{sen} x + \cos y = 1 \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

7. **[1,5 puntos]** Realiza las siguientes operaciones con números complejos. Expresa el resultado en forma binómica (el resultado del apartado a) exprésalo también en forma polar).

$$\text{a) } 3 - 6i - (2 + 4i)(-2 + 3i) \quad ; \quad \text{b) } \frac{-3 - i}{i(2 + i)} \quad ; \quad \text{c) } \left(i - \frac{1}{i}\right)^3$$

8. **[1 punto]** Las soluciones de la ecuación $x - 2 + \frac{2}{x} = 0$ son complejas. Hállalas y simplifícalas al máximo.

Soluciones

1. El ángulo x es desconocido, pero se sabe que se encuentra en el primer cuadrante. Se sabe además que

$$\frac{4}{\operatorname{tg}^2 x} = 5 \text{ Hallar el valor exacto, racionalizado y simplificado de } \operatorname{sen} x \text{ y de } \cos x.$$

$$\frac{4}{\operatorname{tg}^2 x} = 5 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{4}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \text{ Además, } 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}.$$

$$\text{Como } 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{9}{5} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{Finalmente } \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x \cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 3} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{2}{3}$$

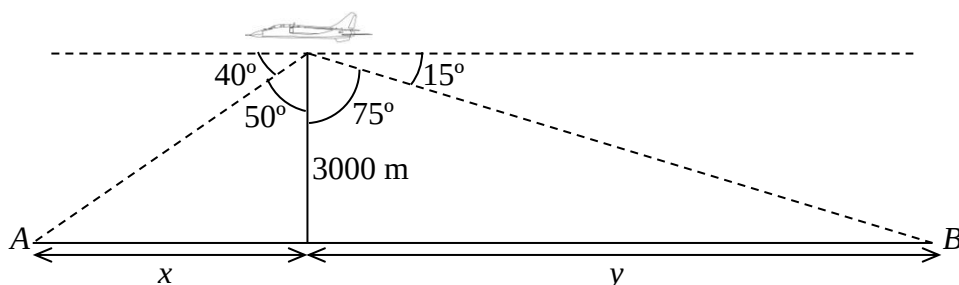
2. Observando el dibujo es claro que $\alpha = \widehat{BAC} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, y que $\beta = \widehat{ABC} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Por tanto $\gamma = \widehat{ACB} = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$. Usando el teorema de los senos en el triángulo ABC tenemos:

$$\frac{4000}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen} \alpha} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{4000 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} 75^\circ} \cong 3586,3 \text{ metros.}$$

Entonces, en el triángulo rectángulo formado por el pico de la montaña, $\overline{BC}$ y la horizontal podemos hallar h :

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{h}{\overline{BC}} \Rightarrow h = \overline{BC} \cdot \operatorname{sen} 45^\circ \Rightarrow h = 2535,9 \text{ metros.}$$

3. Un dibujo representativo de la situación puede ser el siguiente:



Entonces:

$$\operatorname{tg} 50^\circ = \frac{x}{3000} \Rightarrow x = 3000 \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \Rightarrow x \cong 3575,26 \text{ m}; \quad \operatorname{tg} 75^\circ = \frac{y}{3000} \Rightarrow y = 3000 \cdot \operatorname{tg} 75^\circ \Rightarrow y \cong 11196,15 \text{ m}$$

Por tanto, la distancia entre A y B es $x + y = 3575,26 + 11196,15 = 14771,41$ metros.

Nota: hay otra posible solución si los dos pueblos están situados “al mismo lado” del avión. En este caso, la distancia entre los dos pueblos es igual a la diferencia entre las dos cantidades anteriores: 7620,89 metros.

4. Demuestra que es cierta la siguiente identidad: $\frac{1 - \cos 2x}{\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x} = 2 \operatorname{tg}^2 x$

$$\frac{1 - \cos 2x}{\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x} = \frac{1 - (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 2 \operatorname{tg}^2 x$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad \frac{2 \cos(45^\circ + \alpha) \cdot \cos(45^\circ - \alpha)}{\cos 2\alpha} &= \frac{2(\cos 45^\circ \cos \alpha - \sin 45^\circ \sin \alpha) \cdot (\cos 45^\circ \cos \alpha + \sin 45^\circ \sin \alpha)}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \\
 &= \frac{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \right)}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos \alpha - \sin \alpha) \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha)}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \\
 &= \frac{2 \cdot \frac{2}{4} \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = 2 \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{4} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad a) \quad \cos 2x + \cos x \sin 2x &= 2 \sin x + 1 \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + \cos x \cdot 2 \sin x \cos x = 2 \sin x + 1 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + 2 \sin x \cos^2 x = 2 \sin x + 1 \Rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin^2 x + 2 \sin x (1 - \sin^2 x) = 2 \sin x + 1 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow -2 \sin^2 x + 2 \sin x - 2 \sin^3 x = 2 \sin x \Rightarrow 2 \sin^3 x + 2 \sin^2 x = 0 \Rightarrow 2 \sin^2 x (\sin x + 1) = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{cases} 2 \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = 0^\circ ; x = 180^\circ \\ \sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = 270^\circ \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$b) \quad \begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ . Despejando de la primera ecuación: } \sin x = 1 - \cos y \text{ . Sustituyendo en la segunda:}$$

$$(1 - \cos y)^2 + \cos^2 y = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 2 \cos y + \cos^2 y + \cos^2 y = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 - 4 \cos y + 2 \cos^2 y + 2 \cos^2 y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cos^2 y - 4 \cos y + 1 = 0 \Rightarrow \cos y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, como $\cos y = \frac{1}{2}$, entonces $y = 60^\circ$.

Como $\sin x = 1 - \cos y \Rightarrow \sin x = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 30^\circ$.

$$7. \quad a) \quad 3 - 6i - (2 + 4i)(-2 + 3i) = 3 - 6i - (-4 + 6i - 8i - 12) = 3 - 6i + 4 + 2i + 12 = 19 - 4i$$

Módulo: $r = \sqrt{19^2 + (-4)^2} = \sqrt{377}$. Argumento: $\theta = \arctg \frac{-4}{19} = 360^\circ - 11,89^\circ = 348,11^\circ$.

Forma polar: $\sqrt{377}_{348,11^\circ}$

$$b) \quad \frac{-3-i}{i(2+i)} = \frac{-3-i}{2i-1} = \frac{-3-i}{-1+2i} = \frac{(-3-i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{3+6i+i-2}{(-1)^2 - (2i)^2} = \frac{1+7i}{1+4} = \frac{1+7i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$$

$$c) \quad \left(i - \frac{1}{i}\right)^3 = \left(i - \frac{-i}{i(-i)}\right)^3 = \left(i - \frac{-i}{-i^2}\right)^3 = \left(i - \frac{-i}{1}\right)^3 = (i+i)^3 = (2i)^3 = 8i^3 = 8(-i) = -8i$$

$$8. \quad x - 2 + \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \text{ . El discriminante de la ecuación de segundo grado es:}$$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$. Por tanto, las soluciones de la ecuación son las siguientes:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4} \sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \frac{2}{2} \pm \frac{2i}{2} = \begin{cases} x_1 = 1+i \\ x_2 = 1-i \end{cases}$$