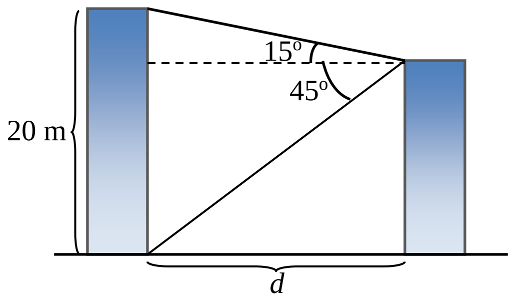
1. **[1 punto]** El ángulo α es desconocido, pero se sabe que se encuentra en el cuarto cuadrante y que $\dfrac{1}{\cos\alpha}=3$, halla el <u>valor exacto, racionalizado y simplificado</u> de $\operatorname{sen}\alpha$ y de $\operatorname{tg}\alpha$.

2. **[1 punto]** La altura de una casa es de 20 metros. Desde la parte superior de otro edificio, el ángulo de elevación con el que se ve la parte superior de la primera casa es de 15° y el ángulo de depresión de su parte inferior es de 45°. Hallar la distancia d entre las dos casas. (Ver figura de la derecha).



3. **[1,5 puntos]** Un globo aerostático se encuentra sujeto al suelo, mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60 m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37°. Calcula la medida del otro cable y la altura a la que se encuentra el globo. Realiza un dibujo de la situación.

4. **[1 punto]** Demuestra que es cierta la siguiente identidad: $\dfrac{\cos x+\operatorname{sen}x}{\cos x-\operatorname{sen}x}-\dfrac{\cos x-\operatorname{sen}x}{\cos x+\operatorname{sen}x}=2\operatorname{tg}2x$

5. **[1 punto]** Simplifica de manera razonada, paso a paso, la expresión siguiente: $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}$

6. **[2 puntos]** Resolver la siguiente ecuación trigonométrica y el siguiente sistema de ecuaciones trigonométricas, dando las soluciones que se encuentren en el intervalo $[0^{\circ}, 360^{\circ})$ (las del sistema darlas solamente en el primer cuadrante).

a) $\operatorname{tg}x+2\operatorname{sen}x=0$; b) $\begin{cases}\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{sen}y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\\[2ex] \cos x\cdot\operatorname{sen}y=\dfrac{\sqrt{6}}{4}\end{cases}$

7. **[1,5 puntos]** Realiza las siguientes operaciones con números complejos. Expresa el resultado en forma binómica (el resultado del apartado a) exprésalo también en forma polar).

a) $(3-i)(-2+4i)-(6-2i)$; b) $\dfrac{1+i}{(2+i)(3-i)}$; c) $\left(\dfrac{1}{1+i}\right)^{2}$

8. **[1 punto]** Las soluciones de la ecuación $\dfrac{x}{4}-1+\dfrac{5}{4x}=0$ son complejas. Hállalas y simplifícalas al máximo.

Soluciones

1. El ángulo α es desconocido pero se sabe que se encuentra en el cuarto cuadrante y que $\frac{1}{\cos\alpha}=3$, halla el valor exacto, racionalizado y simplificado de $\operatorname{sen}\alpha$ y de $\operatorname{tg}\alpha$.

   $\frac{1}{\cos\alpha}=3 \Rightarrow \cos\alpha=\frac{1}{3} \Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{1}{9}$. Como $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, tenemos:

   $\operatorname{sen}^2\alpha+\frac{1}{9}=1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha=1-\frac{1}{9} \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha=\frac{8}{9} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=-\frac{\sqrt{8}}{3}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (el signo es negativo porque el ángulo se encuentra en el cuarto cuadrante). $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-2\sqrt{2}/3}{1/3}=-2\sqrt{2}$

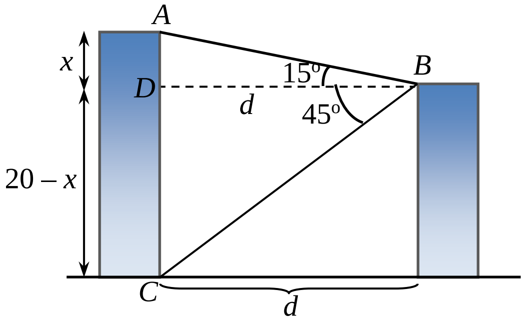
2. Usando los triángulos ABD y BDC podemos establecer el siguiente sistema de ecuaciones:

   $$\begin{cases}\operatorname{tg}15^\circ=\dfrac{x}{d}\\ \operatorname{tg}45^\circ=\dfrac{20-x}{d}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}d=\dfrac{x}{\operatorname{tg}15^\circ}\\ d=\dfrac{20-x}{\operatorname{tg}45^\circ}\end{cases} \Rightarrow \frac{x}{\operatorname{tg}15^\circ}=\frac{20-x}{\operatorname{tg}45^\circ} \Rightarrow$$

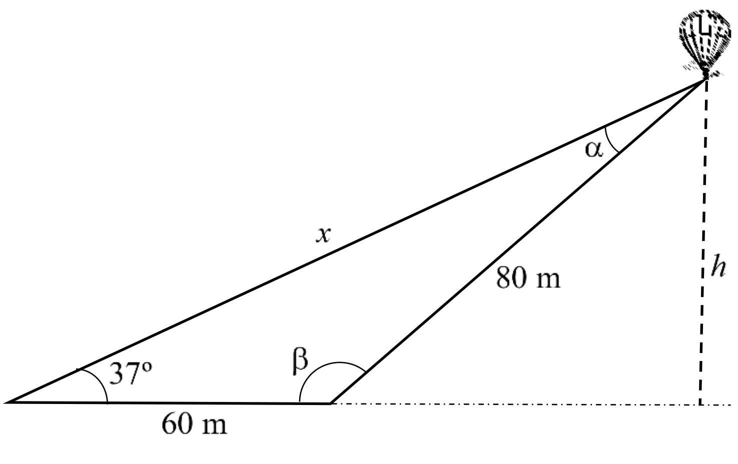
   $$\Rightarrow x\cdot\operatorname{tg}45^\circ=\operatorname{tg}15^\circ\cdot(20-x) \Rightarrow x=0,27\cdot(20-x) \Rightarrow$$

   $$x=5,4-0,27x \Rightarrow x+0,27x=5,4 \Rightarrow 1,27x=5,4 \Rightarrow x=4,25$$

   Por tanto, $d=\frac{x}{\operatorname{tg}15^\circ} \Rightarrow d=\frac{4,25}{0,27} \Rightarrow d=15,74$ metros.



3. Usando el dibujo y aplicando el teorema de los senos, tenemos:



   $$\frac{80}{\operatorname{sen}37^\circ}=\frac{60}{\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=\frac{60\cdot\operatorname{sen}37^\circ}{80} \Rightarrow$$

   $$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=0,45 \Rightarrow \alpha=26,83^\circ.$$

   Por tanto $\beta=180^\circ-37^\circ-26,83^\circ=116,17^\circ$.

   Usando otra vez el teorema de los senos:

   $$\frac{80}{\operatorname{sen}37^\circ}=\frac{x}{\operatorname{sen}116,17^\circ} \Rightarrow$$

   $$\Rightarrow x=\frac{80\cdot\operatorname{sen}116,17^\circ}{\operatorname{sen}37^\circ} \Rightarrow x=119,3 \text{ metros.}$$

   Además, $\operatorname{sen}37^\circ=\frac{h}{x} \Rightarrow h=119,3\cdot\operatorname{sen}37^\circ=71,8$ m.

4. Demuestra que es cierta la siguiente identidad: $\frac{\cos x+\operatorname{sen}x}{\cos x-\operatorname{sen}x}-\frac{\cos x-\operatorname{sen}x}{\cos x+\operatorname{sen}x}=2\operatorname{tg}2x$

   $$\frac{\cos x+\operatorname{sen}x}{\cos x-\operatorname{sen}x}-\frac{\cos x-\operatorname{sen}x}{\cos x+\operatorname{sen}x}=\frac{(\cos x+\operatorname{sen}x)^2-(\cos x-\operatorname{sen}x)^2}{(\cos x-\operatorname{sen}x)(\cos x+\operatorname{sen}x)}=$$

   $$=\frac{\cos^2x+2\operatorname{sen}x\cos x+\operatorname{sen}^2x-\cos^2x+2\operatorname{sen}x\cos x-\operatorname{sen}^2x}{(\cos x-\operatorname{sen}x)(\cos x+\operatorname{sen}x)}=\frac{\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}2x}{\cos^2x-\operatorname{sen}^2x}=\frac{2\operatorname{sen}2x}{\cos 2x}=2\operatorname{tg}2x$$

5. $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha+\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}}=\dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}}=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\left(\operatorname{sen}^2\alpha+\cos\alpha\right)}{\operatorname{sen}\alpha\left(\operatorname{sen}^2\alpha+\cos\alpha\right)}=\cos\alpha$

6. a) $\operatorname{tg}x+2\operatorname{sen}x=0\Rightarrow\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+2\operatorname{sen}x=0\Rightarrow\operatorname{sen}x+2\operatorname{sen}x\cos x=0\Rightarrow\operatorname{sen}x\left(1+2\cos x\right)=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{sen}x=0\Rightarrow x=0^{\circ}\,;\,x=180^{\circ}\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=120^{\circ}\,;\,x=240^{\circ}\end{cases}$$

b) $\begin{cases}\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{sen}y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\\ \cos x\cdot\operatorname{sen}y=\dfrac{\sqrt{6}}{4}\end{cases}$. Dividiendo ambas ecuaciones tenemos:

$$\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{4}}\Rightarrow\operatorname{tg}x=\frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{6}}\Rightarrow\operatorname{tg}x=\sqrt{\frac{2}{6}}\Rightarrow\operatorname{tg}x=\sqrt{\frac{1}{3}}\Rightarrow\operatorname{tg}x=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x=30^{\circ}.$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$\operatorname{sen}30^{\circ}\cdot\operatorname{sen}y=\frac{\sqrt{2}}{4}\Rightarrow\frac{1}{2}\operatorname{sen}y=\frac{\sqrt{2}}{4}\Rightarrow\operatorname{sen}y=\frac{2\sqrt{2}}{4}\Rightarrow\operatorname{sen}y=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow y=45^{\circ}.$$

7. a) $(3-i)(-2+4i)-(6-2i)=-6+12i+2i-4i^2-6+2i=-6+12i+2i+4-6+2i=-8+16i$

Módulo: $r=\sqrt{(-8)^2+16^2}=\sqrt{320}=\sqrt{2^6\cdot5}=8\sqrt{5}$. Argumento: $\theta=\operatorname{arctg}\dfrac{16}{-8}=360^{\circ}-63,43^{\circ}=296,57^{\circ}$.

Forma polar: $8\sqrt{5}_{296,57^{\circ}}$

b) $\dfrac{1+i}{(2+i)(3-i)}=\dfrac{1+i}{6-2i+3i+1}=\dfrac{1+i}{7+i}=\dfrac{(1+i)(7-i)}{(7+i)(7-i)}=\dfrac{7-i+7i+1}{7^2-i^2}=\dfrac{8+6i}{49+1}=\dfrac{8+6i}{50}=\dfrac{4}{25}+\dfrac{3}{25}i$

c) $\left(\dfrac{1}{1+i}\right)^2=\left(\dfrac{1(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right)^2=\left(\dfrac{1-i}{1-i^2}\right)^2=\left(\dfrac{1-i}{1-(-1)}\right)^2=\left(\dfrac{1-i}{2}\right)^2=\dfrac{(1-i)^2}{4}=\dfrac{1-2i+i^2}{4}=$

$=\dfrac{1-2i-1}{4}=\dfrac{-2i}{4}=-\dfrac{1}{2}i$

8. $\dfrac{x}{4}-1+\dfrac{5}{4x}=0\Rightarrow x^2-4x+5=0$. El discriminante de la ecuación de segundo grado es:

$\Delta=(-4)^2-4\cdot1\cdot5=16-20=-4$. Por tanto, las soluciones de la ecuación son las siguientes:

$$x=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}\sqrt{-1}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{-1}}{2}=\frac{4\pm2i}{2}=\frac{4}{2}\pm\frac{2i}{2}=\begin{cases}x_1=2+i\\ x_2=2-i\end{cases}$$