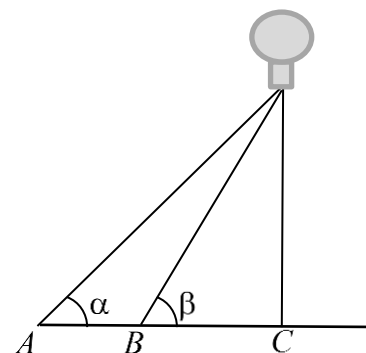


1. **[1 punto]** Sabiendo que ángulo α se encuentra en el tercer cuadrante y que $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, halla el valor exacto, racionalizado y simplificado de $\sin \alpha$ y de $\operatorname{tg} \alpha$.

2. **[1,5 puntos]** Para hallar la altura a la que está situado un globo, Rosa se coloca en un punto B y Carlos en un punto A , a 5 metros de ella, de tal forma que los puntos A , B y C están alineados (ver figura). Si los ángulos α y β miden 45° y 50° respectivamente, ¿a qué altura se encuentra el globo?



3. **[1 punto]** Simplifica de manera razonada, paso a paso, la expresión siguiente:

$$\frac{(\operatorname{tg}^2 \alpha - 1) \cdot \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - 1}$$

4. **[1 punto]** Resolver la ecuación trigonométrica $2 \cos^2 x + \sin x = 1$. Dar las soluciones en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$.

5. **[2 puntos]** Realiza las siguientes operaciones con números complejos y expresa el resultado en forma binómica:

$$\text{a) } (\sqrt{3} + i)^3 ; \text{ b) } \frac{3+5i}{1-i} ; \text{ c) } \left(1 + \frac{1}{i}\right)^2 + \left(i - \frac{1}{i}\right)^2$$

6. **[1,5 puntos]** Halla las raíces cúbicas del número complejo $4 - 4\sqrt{3}i$, es decir, hallar $\sqrt[3]{4 - 4\sqrt{3}i}$

7. Contesta a las siguientes cuestiones sobre vectores:

- a) **[0,5 puntos]** Calcular el valor de m para que el vector $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, m\right)$ sea unitario, es decir, para que su módulo sea igual a uno.
- b) **[0,5 puntos]** Calcula el punto simétrico del punto $A(3, 2)$ respecto del punto $M(4, 3)$.
- c) **[1 punto]** Hallar el vector $\vec{u} = (a, b)$ cuyo producto escalar por sí mismo es 20 y cuyo producto escalar por el vector $\vec{v} = (3, 2)$ es igual a 2.

Soluciones

1. **[1 punto]** Sabiendo que ángulo α se encuentra en el tercer cuadrante y que $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, halla el valor exacto, racionalizado y simplificado de $\sin \alpha$ y de $\operatorname{tg} \alpha$.

Puesto que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, tenemos:

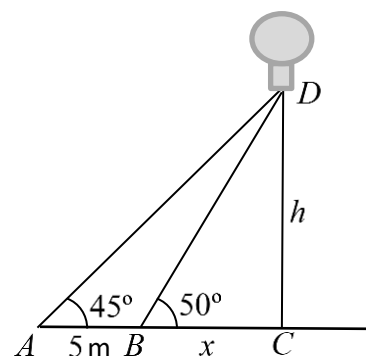
$$\sin^2 \alpha + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \frac{9}{25} = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{4}{5}$$

(tomamos la raíz negativa porque α se encuentra en el tercer cuadrante).

$$\text{Por último: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-4/5}{-3/5} = \frac{4}{3}.$$

2. **[1,5 puntos]** Para hallar la altura a la que está situado un globo, Rosa se coloca en un punto B y Carlos en un punto A , a 5 metros de ella, de tal forma que los puntos A , B y C están alineados (ver figura). Si los ángulos α y β miden 45° y 50° respectivamente, ¿a qué altura se encuentra el globo?

Llamemos h a la altura del globo y x a la distancia de B a C . Llamemos también D al punto donde se encuentra la base del globo. Entonces, los triángulos ADC y BDC son claramente rectángulos. Por tanto:



$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{h}{5+x} \Rightarrow 1 = \frac{h}{5+x} \Rightarrow h = 5+x \text{ y } \operatorname{tg} 50^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow 1,19 = \frac{h}{x} \Rightarrow h = 1,19x. \text{ Igualando ambas expresiones:}$$

$$5+x = 1,19x \Rightarrow x - 1,19x = -5 \Rightarrow -0,19x = -5 \Rightarrow x = \frac{-5}{-0,19} \Rightarrow x = 26,316 \text{ m. Sustituyendo, por ejemplo, en}$$

$$h = 5+x, \text{ tenemos } h = 5+26,316 = 31,316. \text{ O sea, la altura del globo es de, aproximadamente, 31,316 metros.}$$

3. **[1 punto]** Simplifica de manera razonada, paso a paso, la expresión siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{(\operatorname{tg}^2 \alpha - 1) \cdot \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - 1} &= \frac{\left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 1\right) \cdot \cos \alpha}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 1} = \frac{\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \cos \alpha}{\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \cos \alpha}{(\sin \alpha - \cos \alpha) \cos \alpha} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot (\sin \alpha - \cos \alpha)}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \sin \alpha + \cos \alpha. \end{aligned}$$

4. **[1 punto]** Resolver la ecuación trigonométrica $2\cos^2 x + \sin x = 1$. Dar las soluciones en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$.

$$2\cos^2 x + \sin x = 1 \Rightarrow 2(1 - \sin^2 x) + \sin x = 1 \Rightarrow 2 - 2\sin^2 x + \sin x = 1 \Rightarrow -2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0.$$

$$\text{Entonces: } \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-4} = \frac{-1 \pm 3}{-4} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{-4}{-4} = 1 \end{cases}.$$

Si $\sin x = -\frac{1}{2}$, entonces $x = 210^\circ$ o $x = 330^\circ$. Sin $\sin x = 1$, entonces $x = 90^\circ$.

5. **[2 puntos]** Realiza las siguientes operaciones con números complejos y expresa el resultado en forma binómica:

$$a) (\sqrt{3} + i)^3 = \left[\begin{array}{l} r = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \alpha = \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \arctg \frac{\sqrt{3}}{3} = 30^\circ \end{array} \right] = (2_{30^\circ})^3 = 2^3_{3 \cdot 30^\circ} = 8_{90^\circ} = 8(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 8i.$$

$$b) \frac{3+5i}{1-i} = \frac{(3+5i) \cdot (1+i)}{(1-i) \cdot (1+i)} = \frac{3+3i+5i+5i^2}{1^2-i^2} = \frac{3+8i-5}{1-(-1)} = \frac{-2+8i}{2} = -1+4i.$$

$$c) \left(1 + \frac{1}{i}\right)^2 + \left(i - \frac{1}{i}\right)^2 = \left(1 + \frac{-i}{i \cdot (-i)}\right)^2 + \left(i - \frac{-i}{i \cdot (-i)}\right)^2 = \left(1 + \frac{-i}{-i^2}\right)^2 + \left(i - \frac{-i}{-i^2}\right)^2 = \left(1 - \frac{i}{1}\right)^2 + \left(i - \frac{-i}{1}\right)^2 = \\ = (1-i)^2 + (2i)^2 = 1 - 2i + i^2 + 4i^2 = 1 - 2i - 1 + 4 \cdot (-1) = 1 - 2i - 1 - 4 = -4 - 2i.$$

6. **[1,5 puntos]** Halla las raíces cúbicas del número complejo $4 - 4\sqrt{3}i$, es decir, hallar $\sqrt[3]{4 - 4\sqrt{3}i}$

$$\sqrt[3]{4 - 4\sqrt{3}i} = \left[\begin{array}{l} r = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 48} = \sqrt{64} = 8 \\ \alpha = \arctg \frac{-4\sqrt{3}}{4} = \arctg(-\sqrt{3}) = -60^\circ = 300^\circ \end{array} \right] = \sqrt[3]{8}_{300^\circ} = \sqrt[3]{8}_\beta = 2_\beta \quad (\text{el argumento es } 300^\circ$$

porque el número complejo $4 - 4\sqrt{3}i$ se encuentra en el cuarto cuadrante).

Los valores de β se obtienen mediante la fórmula $\beta = \frac{300^\circ + 360^\circ k}{3}$, donde k se mueve entre 0 y 2. Por tanto,

las tres raíces que se piden son: $r_1 = 2_{100^\circ}$, $r_2 = 2_{220^\circ}$, $r_3 = 2_{340^\circ}$.

7. Contesta a las siguientes cuestiones sobre vectores:

a) **[0,5 puntos]** Calcular el valor de m para que el vector $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, m\right)$ sea unitario, es decir, para que su módulo

$$\text{sea igual a uno. } |\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + m^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + m^2 = 1 \Rightarrow m^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow m = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b) **[0,5 puntos]** Calcula el punto simétrico del punto $A(3,2)$ respecto del punto $M(4,3)$.

Llamemos $B(x,y)$ al punto simétrico del punto $A(3,2)$ respecto del punto $M(4,3)$. Entonces M será el punto medio de A y B . Es decir: $(4,3) = \left(\frac{3+x}{2}, \frac{2+y}{2}\right)$. De aquí: $\begin{cases} 8 = 3+x \Rightarrow x = 5 \\ 6 = 2+y \Rightarrow y = 4 \end{cases}$. Por tanto, el punto simétrico del punto $A(3,2)$ respecto del punto $M(4,3)$ es $B(5,4)$.

c) **[1 punto]** Hallar el vector $\vec{u} = (a,b)$ cuyo producto escalar por sí mismo es 20 y cuyo producto escalar por el vector $\vec{v} = (3,2)$ es igual a 2.

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{u} = (a,b) \cdot (a,b) = a^2 + b^2 = 20 \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = (a,b) \cdot (3,2) = 3a + 2b = 2 \end{cases} \quad \text{De la segunda ecuación: } a = \frac{2-2b}{3}. \text{ Sustituyendo en la primera:}$$

$$\left(\frac{2-2b}{3}\right)^2 + b^2 = 20 \Rightarrow \frac{4-8b+4b^2}{9} + b^2 = 20 \Rightarrow 4-8b+4b^2+9b^2 = 180 \Rightarrow 13b^2-8b-176 = 0.$$

Las soluciones de la ecuación anterior son $b_1 = 4$ y $b_2 = -\frac{44}{13}$. Sustituyendo, se tiene $a_1 = -2$, $a_2 = \frac{38}{13}$.