

1. **[1 punto]** Sabiendo que ángulo α se encuentra en el segundo cuadrante y que $\operatorname{tg} \alpha = -2$, halla el valor exacto, racionalizado y simplificado de $\operatorname{sen} \alpha$ y de $\cos \alpha$.
2. **[1 punto]** Un avión vuela en línea horizontal hacia el este. Desde un punto situado en el suelo, al sur del avión, se ve a este bajo un ángulo de 45° . Cuando el avión ha volado 1000 metros, desde ese mismo punto se le ve con un ángulo de 30° . ¿Cuál es la altura de vuelo?
3. **[1 punto]** Demuestra que es cierta la siguiente identidad: $\cos(x+y)\cos(x-y)+1=\cos^2 x+\cos^2 y$.
4. **[1 punto]** Simplifica de manera razonada, paso a paso, la expresión siguiente: $\frac{1}{\cos^2 x(1-\operatorname{tg}^2 x)}$.
5. **[2 puntos]** Resolver la siguiente ecuación trigonométrica y el siguiente sistema de ecuaciones trigonométricas, dando las soluciones que se encuentren en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$ (las del sistema darlas solamente en el primer cuadrante).

$$\text{a) } \cos 2x = 5 - 6 \cos^2 x \quad ; \quad \text{b) } \begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$

6. **[1 punto]** Realiza las siguientes operaciones con números complejos y expresa el resultado en forma binómica:

$$\text{a) } (1+2i)^2(1-i) \quad ; \quad \text{b) } \frac{2-3i}{1-i}$$

7. **[1,5 puntos]** Halla las cuatro raíces: $\sqrt[4]{2+\frac{3}{2}i}$

8. **[1,5 puntos; 0,5 puntos por apartado]** Contesta a las siguientes cuestiones:

- a) Hallar el ángulo formado por los vectores $\vec{u} = (5, \sqrt{3})$ y $\vec{v} = (-\sqrt{3}, 1)$.
- b) Dado el vector $\vec{u} = (1, 2)$, hallar otro vector $\vec{v}$ tal que $\vec{u} \perp \vec{v}$ y $|\vec{v}| = 3$.
- c) Calcula el módulo del vector $\vec{u} + \vec{v}$ sabiendo que $\vec{u} \perp \vec{v}$, $|\vec{u}| = 12$ y que $|\vec{v}| = 15$.

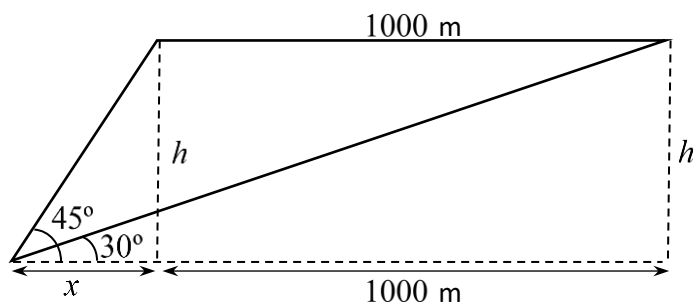
Soluciones

1. **[1 punto]** Sabiendo que ángulo α se encuentra en el segundo cuadrante y que $\operatorname{tg} \alpha = -2$, halla el valor exacto, racionalizado y simplificado de $\operatorname{sen} \alpha$ y de $\cos \alpha$.

$$\operatorname{tg} \alpha = -2 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = -2 \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -2 \cos^2 \alpha. \text{ Como } \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ entonces, sustituyendo:}$$

$$(-2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow 4 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow 5 \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{5}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

2. **[1 punto]** Un avión vuela en línea horizontal hacia el este. Desde un punto situado en el suelo, al sur del avión, se ve a este bajo un ángulo de 45° . Cuando el avión ha volado 1000 metros, desde ese mismo punto se le ve con un ángulo de 30° . ¿Cuál es la altura de vuelo?



Observando la figura en la que se representa la situación planteada en el enunciado, y tomando los triángulos rectángulos adecuados, se tiene:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{1000 + x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = x \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \\ h = (1000 + x) \operatorname{tg} 30^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \cdot 1 = (1000 + x) \cdot 0,58 \Rightarrow x = 580 + 0,58x \Rightarrow 0,42x = 580 \Rightarrow x = 1380,95 \text{ m. Por tanto:}$$

$$h = x \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = x \cdot 1 \Rightarrow h = 1380,95 \text{ m.}$$

3. **[1 punto]** Demuestra que es cierta la siguiente identidad: $\cos(x+y)\cos(x-y)+1=\cos^2 x+\cos^2 y$.

$$\cos(x+y)\cos(x-y)+1=(\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)(\cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)+1=$$

$$=(\cos x \cos y)^2 - (1 - \cos^2 x)(1 - \cos^2 y) + 1 = \cos^2 x \cos^2 y - (1 - \cos^2 y - \cos^2 x + \cos^2 x \cos^2 y) + 1 =$$

$$= \cos^2 x \cos^2 y - 1 + \cos^2 y + \cos^2 x - \cos^2 x \cos^2 y + 1 = \cos^2 x + \cos^2 y$$

4. **[1 punto]** Simplifica de manera razonada, paso a paso, la expresión siguiente:

$$\frac{1}{\cos^2 x (1 - \operatorname{tg}^2 x)} = \frac{1}{\cos^2 x \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right)} = \frac{1}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\cos 2x} = \sec 2x$$

5. **[2 puntos]** Resolver la siguiente ecuación trigonométrica y el siguiente sistema de ecuaciones trigonométricas, dando las soluciones que se encuentren en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$ (las del sistema darlas solamente en el primer cuadrante).

a) $\cos 2x = 5 - 6 \cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 5 - 6 \cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 5 - 6 \cos^2 x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 5 - 6 \cos^2 x \Rightarrow 8 \cos^2 x = 6 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 30^\circ; x = 330^\circ \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 150^\circ; x = 210^\circ \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \sin x - \sin y = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases} . \text{ Sumando ambas ecuaciones se tiene: } 2\sin x = \sqrt{3} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 60^\circ .$$

De manera similar, restando ambas ecuaciones tenemos: $2\sin y = 1 \Rightarrow \sin y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 30^\circ$.

6. **[1 punto]** Realiza las siguientes operaciones con números complejos y expresa el resultado en forma binómica:

$$a) (1+2i)^2(1-i) = (1+4i+4i^2)(1-i) = (1+4i-4)(1-i) = (-3+4i)(1-i) = -3+3i+4i-4i^2 = -3+3i+4i+4 = 1+7i .$$

$$b) \frac{2-3i}{1-i} = \frac{(2-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+2i-3i-3i^2}{1-i^2} = \frac{2+2i-3i+3}{1+1} = \frac{5-i}{2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$$

7. **[1,5 puntos]** Halla las cuatro raíces: $\sqrt[4]{2+\frac{3}{2}i}$

$$\sqrt[4]{2+\frac{3}{2}i} = \left[\begin{aligned} r &= \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{4+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} \\ \theta &= \arctg \frac{3/2}{2} = \arctg \frac{3}{4} = 36,87^\circ \end{aligned} \right] = \left(\frac{5}{2}\right)_{36,87^\circ} . \text{ Entonces } \sqrt[4]{2+\frac{3}{2}i} = \sqrt[4]{\left(\frac{5}{2}\right)_{36,87^\circ}} = \sqrt[4]{\frac{5}{2}}_{\alpha} .$$

Los valores de α se obtienen mediante la fórmula $\alpha = \frac{36,87^\circ + 360^\circ k}{4}$, donde k se mueve entre 0 y 3. Por

tanto, las cuatro raíces que se piden son: $r_1 = \sqrt[4]{\frac{5}{2}}_{9,22^\circ}$, $r_2 = \sqrt[4]{\frac{5}{2}}_{99,22^\circ}$, $r_3 = \sqrt[4]{\frac{5}{2}}_{189,22^\circ}$, $r_4 = \sqrt[4]{\frac{5}{2}}_{279,22^\circ}$.

8. **[1,5 puntos; 0,5 puntos por apartado]** Contesta a las siguientes cuestiones:

a) Hallar el ángulo formado por los vectores $\vec{u} = (5, \sqrt{3})$ y $\vec{v} = (-\sqrt{3}, 1)$.

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{5\sqrt{3} + \sqrt{3}}{\sqrt{25+3} \cdot \sqrt{3+1}} = \frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{28}} \cong 0,98 \Rightarrow \alpha = 11,48^\circ .$$

b) Dado el vector $\vec{u} = (1, 2)$, hallar otro vector $\vec{v}$ tal que $\vec{u} \perp \vec{v}$ y $|\vec{v}| = 3$.

$$\text{Llamemos } \vec{v} = (x, y) . \text{ Entonces: } \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow x + 2y = 0 \\ |\vec{v}| = 3 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 \end{cases} . \text{ De la primera ecuación } x = -2y .$$

$$\text{Sustituyendo en la segunda: } 4y^2 + y^2 = 9 \Rightarrow 5y^2 = 9 \Rightarrow y^2 = \frac{9}{5} \Rightarrow y = \pm \frac{3\sqrt{5}}{5} . \text{ Por tanto: } x = \mp \frac{6\sqrt{5}}{5} .$$

$$\text{De este modo, tenemos dos soluciones: } \vec{v} = \left(\frac{-6\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{5}}{5}\right); \vec{v} = \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, \frac{-3\sqrt{5}}{5}\right) .$$

c) Calcula el módulo del vector $\vec{u} + \vec{v}$ sabiendo que $\vec{u} \perp \vec{v}$, $|\vec{u}| = 12$ y que $|\vec{v}| = 15$.

Como $\vec{u} \perp \vec{v}$, se tiene que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} = 0$. Entonces:

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 12^2 + 15^2 = 369 .$$

$$\text{Por tanto: } |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{369} \cong 19,21 .$$