Demostración de igualdades trigonométricas:

1. $$\frac{2\text{sen }\alpha+3}{2\text{tg }\alpha+3\sec\alpha}=\cos\alpha$$

Solución:

- Vamos a tratar de manipular el lado izquierdo de la igualdad, para convertirlo en $\cos\alpha$. Teniendo en cuenta que $\text{tg }\alpha=\dfrac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha}$ y que $\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$, podemos escribir:

$$\frac{2\text{sen }\alpha+3}{2\text{tg }\alpha+3\sec\alpha}=\frac{2\text{sen }\alpha+3}{2\dfrac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{3}{\cos\alpha}}$$

- Operamos esa expresión con el fin de simplificarla:

$$\frac{2\text{sen }\alpha+3}{2\dfrac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{3}{\cos\alpha}}=\frac{2\text{sen }\alpha+3}{\dfrac{2\text{sen }\alpha+3}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha\left(\cancel{2\text{sen }\alpha+3}\right)}{\cancel{2\text{sen }\alpha+3}}=\cos\alpha$$

- Como acabamos de ver, la igualdad se cumple.

2. $$\text{tg}^2\alpha=\frac{\text{sen}^2\alpha}{1-\text{sen}^2\alpha}$$

Solución:

Vamos a manipular primeramente el miembro de la izquierda, que llamaremos A:

$$A=\text{tg}^2\alpha=\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Manipulamos el miembro de la derecha, que llamaremos B:

En $B=\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{1-\text{sen}^2\alpha}$ vamos a reescribir el denominador de una forma más conveniente:

Teniendo en cuenta que $\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ se deduce que $1-\text{sen}^2\alpha=\cos^2\alpha$. Entonces:

$$B=\frac{\text{sen}^2\alpha}{1-\text{sen}^2\alpha}=\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Observamos que A=B, luego la identidad es verdadera.

3. $\operatorname{tg}(\alpha)\cdot\operatorname{cotg}(\alpha)-\dfrac{2\operatorname{sen}(\alpha)}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2(\alpha)}}=\left[\cos(\alpha)+\operatorname{sen}(\alpha)\right]\cdot\left(\dfrac{1}{\sec(\alpha)}-\dfrac{1}{\operatorname{cosec}(\alpha)}\right)$

Solución:

Vamos a manipular primeramente el miembro de la izquierda, que llamaremos A:

$$A=\operatorname{tg}(\alpha)\cdot\operatorname{cotg}(\alpha)-\frac{2\cdot\operatorname{sen}(\alpha)}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2(\alpha)}}=\operatorname{tg}(\alpha)\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)}-\frac{2\cdot\operatorname{sen}(\alpha)}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2(\alpha)}}}=$$

$$=1-\frac{2\cdot\operatorname{sen}(\alpha)}{\sqrt{1+\dfrac{\cos^2(\alpha)}{\operatorname{sen}^2(\alpha)}}}=1-\frac{2\cdot\operatorname{sen}(\alpha)}{\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)}{\operatorname{sen}^2(\alpha)}}}=1-\frac{2\cdot\operatorname{sen}(\alpha)}{\sqrt{\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2(\alpha)}}}=$$

$$=1-2\cdot\operatorname{sen}^2(\alpha)$$

Manipulamos el miembro de la derecha, que llamaremos B:

$$B=\left[\cos(\alpha)+\operatorname{sen}(\alpha)\right]\cdot\left(\frac{1}{\sec(\alpha)}-\frac{1}{\operatorname{cosec}(\alpha)}\right)=$$

$$=\left[\cos(\alpha)+\operatorname{sen}(\alpha)\right]\cdot\left[\cos(\alpha)-\operatorname{sen}(\alpha)\right]=$$

$$=\cos^2(\alpha)-\operatorname{sen}^2(\alpha)=1-\operatorname{sen}^2(\alpha)-\operatorname{sen}^2(\alpha)=1-2\cdot\operatorname{sen}^2(\alpha)$$

Observamos que A=B, luego la identidad es cierta.

4. $\dfrac{1}{\sec^2\alpha}=\operatorname{sen}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$

Solución:

Manipulamos primeramente el miembro de la izquierda, que llamaremos A:

$$A=\frac{1}{\sec^2\alpha}=\cos^2\alpha$$

Manipulamos el miembro de la derecha, que llamaremos B:

$$B=\operatorname{sen}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=\left(\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\cdot\cos^2\alpha=\cos^2\alpha$$

Observamos que A=B, luego la identidad es cierta.

5. $\operatorname{cosec}^4\alpha-1=2\operatorname{cotg}^2\alpha+\operatorname{cotg}^4\alpha$

Solución:

Manipulamos el miembro de la izquierda, que llamaremos A:

$$A=\operatorname{cosec}^4\alpha-1=\left(\operatorname{cosec}^2\alpha-1\right)\left(\operatorname{cosec}^2\alpha+1\right)$$

Recordamos que $\operatorname{cosec}^2\alpha=1+\operatorname{cotg}^2\alpha$. Entonces:

$$\left(\operatorname{cosec}^2\alpha-1\right)\left(\operatorname{cosec}^2\alpha+1\right)=\left(1+\operatorname{cotg}^2\alpha-1\right)\left(1+\operatorname{cotg}^2\alpha+1\right)=$$

$$=\operatorname{cotg}^2\alpha\left(\operatorname{cotg}^2\alpha+2\right)=\operatorname{cotg}^4\alpha+2\operatorname{cotg}^2\alpha\,.$$

Hemos llegado a obtener el lado B de la expresión dada, luego se ha demostrado que la igualdad es cierta.

6. $\operatorname{sen}\,2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\,\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

Solución:

Partiendo del miembro de la izquierda, que llamaremos A, mediante manipulaciones adecuadas llegaremos al miembro de la derecha:

$$\operatorname{sen}\,2\alpha=2\cdot\operatorname{sen}\,\alpha\cdot\cos\,\alpha=2\cdot\frac{\operatorname{sen}\,\alpha\cdot\cos\,\alpha}{\cos\,\alpha}\cdot\cos\,\alpha=2\cdot\operatorname{tg}\,\alpha\cdot\cos^2\alpha=$$

$$=2\cdot\operatorname{tg}\,\alpha\cdot\frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}=2\cdot\operatorname{tg}\,\alpha\cdot\frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=2\cdot\frac{\operatorname{tg}\,\alpha}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=$$

$=\dfrac{2\cdot\operatorname{tg}\,\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$. Queda así demostrado.