

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Para factorizar un polinomio hay distintos métodos y, frecuentemente, hay que emplear más de uno pero, en general, trabajarás menos y lo harás más rápidamente si sigues el orden en que se te han expuesto.

Veamos qué puede ocurrir conforme el polinomio tiene mayor grado:

Grado 1: Un polinomio de primer grado, $Ax + B$, no se puede descomponer en producto de polinomios de grado menor que el suyo, lo más que puede ocurrir es que se pueda sacar algún factor común de los coeficientes.

Ejemplo 7: $4x + 6 = 2 \cdot (2x + 3)$.

Siempre que se pueda se debe dejar el polinomio con coeficientes enteros. En el ejemplo anterior, es mejor dejar $2x + 3$ que, el producto, $2 \cdot (x + 3/2)$.

Grado 2: Lo primero, si se puede, es sacar factor común; esto hará más fácil e incluso innecesario los pasos siguientes.

Ejemplo 8: $5x^2 + 10x = 5x \cdot (x + 2)$

Ejemplo 9: $18x^2 - 50 = 2 \cdot (9x^2 - 25)$ Continúa en el ejemplo 10

A continuación, si se da alguna de las circunstancias contempladas en los pasos 2° (diferencia de cuadrados), 3° (trinomio cuadrado perfecto) y 4° (el coeficiente de x^2 es 1) ahorrarás tiempo si te das cuenta de ello; si no, tienes dos posibilidades, aplicar el paso 5°, o el 6°. La ventaja del 5° es que se va a lo seguro.

Ejemplo 10: $2 \cdot (9x^2 - 25)$ Hay una diferencia de cuadrados $2 \cdot (9x^2 - 25) = 2 \cdot (3x + 5) \cdot (3x - 5)$

Ejemplo 11: $9x^2 - 30x + 25$ Es un trinomio cuadrado perfecto $9x^2 - 30x + 25 = (3x - 5)^2$

Ejemplo 12: $x^2 + 2x - 15$ Por tanteo $x^2 + 2x - 15 = (x + 5) \cdot (x - 3)$

Ejemplo 13: $10x^2 + 7x - 12$ Hallando sus raíces $10x^2 + 7x - 12 = (5x - 4) \cdot (2x + 3)$ VER →

Es importante tener presente que hay polinomios de segundo grado que son *irreducibles* a

Resumen:

Para factorizar un polinomio de segundo grado, $Ax^2 + Bx + C$, siendo $A \neq 0$:

1°) Sacar factor común:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

2°) Ver si es una diferencia de cuadrados:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

3°) Ver si es un trinomio cuadrado perfecto:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

4°) Si el coeficiente de x^2 es 1 inténtalo por tanteo:

$$x^2 + Sx + P = (x + a) \cdot (x + b)$$

$$\text{si } a \cdot b = P \text{ y } a + b = S$$

5°) Si han fallado los métodos anteriores, halla las raíces x_1, x_2 (resolución de ecuación de 2° grado) y sustituye en: $Ax^2 + Bx + C = A \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

ESTE MÉTODO ES EL MÁS SEGURO

6°) También puedes intentar encontrar divisores de la forma $(x \pm a)$ por la regla de Ruffini:

$$Ax^2 + Bx + C = (x \pm a) \cdot C(x)$$

Factorización de $10x^2 + 7x - 12$

Sus raíces son:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-12)}}{2 \cdot 10} = \begin{cases} x_1 = 4/5 \\ x_2 = -3/2 \end{cases}$$

Como $Ax^2 + Bx + C = A \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

$$\begin{aligned} 10x^2 + 7x - 12 &= 10 \cdot (x - 4/5) \cdot (x + 3/2) = \\ &= 5 \cdot (x - 4/5) \cdot 2 \cdot (x + 3/2) = \\ &= (5x - 4) \cdot (2x + 3) \end{aligned}$$

producto de polinomios de primer grado por no tener raíces reales.

Ejemplo 14: $x^2 + 3x + 4$ 1° tanteo y 2° hallando sus raíces $x^2 + 3x + 4 =$ Es irreducible

Grado 3 : Lo primero, como siempre si se puede, hay que sacar factor común; hará más fáciles los pasos siguientes.

Ejemplo 15: $5x^3 - 15x^2 = 5x^2 \cdot (x - 3)$

Ejemplo 16: $2x^3 - 10x - 24 = 2 \cdot (x^3 - 5x - 12)$ Continúa en el ejemplo 17

Para factorizar un polinomio de tercer grado, hay que acudir al paso 6° (Ruffini) y si tiene alguna raíz entera a , el polinomio quedaría como producto de $(x - a)$ por un polinomio de 2° grado, el cociente de haberlo dividido por $(x - a)$.

Ejemplo 17: $2 \cdot (x^3 - 5x - 12) = 2 \cdot (x - 3) \cdot (x^2 + 3x + 4)$ No se puede factorizar más.

Ejemplo 18: $9x^3 - 21x^2 - 5x + 25 = (x + 1) \cdot (9x^2 - 30x + 25) =$
 $= (x + 1) \cdot (3x - 5)^2$

Grado 4, 5, ...: Para factorizar un polinomio de grado mayor que 3 en el que no se pueda sacar factor común, actuamos como en el de tercer grado (Ruffini) pero ahora habría que hacerlo más veces.

Ejemplo 19: $5x^4 - 10x^3 + 10x - 5 = 5 \cdot (x^4 - 2x^3 + 10x - 1) =$
 $= 5 \cdot (x - 1) \cdot (x^3 - x^2 - x + 1) =$
 $= 5 \cdot (x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x^2 - 1) =$
 $= 5 \cdot (x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) = 5 \cdot (x - 1)^3 \cdot (x + 1)$

Ejemplo 20: $2x^6 + 4x^5 - 38x^4 - 16x^3 + 120x^2 = 2x^2 \cdot (x^4 + 2x^3 - 19x^2 - 8x + 60) = 2x^2 \cdot (x - 2) \cdot (x^3 + 4x^2 - 11x - 30) =$
 $= 2x^2 \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x^2 + 2x - 15) =$
 $= 2x^2 \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x + 5)$

Si un polinomio de 4° grado no tuviese términos de grado impar se podrían utilizar los pasos 2° a 5° considerando que la indeterminada es x^2 (en vez de x) y así descomponerlo en producto de polinomios de 2° grado.

Ejemplo 21: $3x^4 - 12 = 3 \cdot (x^4 - 4) = 3 \cdot (x^2 + 2) \cdot (x^2 - 2) = 3 \cdot (x^2 + 2) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x - \sqrt{2})$

Ejemplo 22: $4x^4 - 20x^2 + 16 = 4 \cdot (x^4 - 5x^2 + 4) = 4 \cdot (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 4) = 4 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$

OJO

Factorización de polinomios de Tercer grado grado,
 $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, siendo $A \neq 0$:

1°) Sacar factor común:

$$a \cdot b + a \cdot c = a(b + c).$$

5°) Sabiendo sus raíces, x_1, x_2, x_3 , no hay pega:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = A \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

El problema es que NO hay una fórmula sencilla para hallar las raíces de los polinomios de tercer grado.

6°) Por la regla de Ruffini (encontrar divisores $(x - a)$):

$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = (x - a) \cdot C(x)$ y $C(x)$ es de
segundo grado

EJERCICIOS FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Ejercicio 1:

- a) $5x^5 - x^4 + 3x^2 = x^2 \cdot (5x^3 - x^2 + 3)$
- b) $2x^3 + x = x \cdot (2x^2 + 1)$
- c) $6x^3 - 15x^2 + 3x = 3x \cdot (2x^2 - 5x + 1)$
- d) $2x^2 + 3x + 2$ No tiene factores en común.

Ejercicio 3:

- a) $x^2 + 16 + 8x = (x + 4)^2$
- b) $x^7 - 2x^4 + x = x \cdot (x^3 - 1)^2$
- c) $9x^2 + 12x - 4 =$ No es el cuadrado de un binomio.
- d) $2x^4 + 2\sqrt{6}x^2 + 3 = (\sqrt{2}x^2 + \sqrt{3})^2$

Ejercicio 5:

- a) $6x^2 - x - 2 = 6 \cdot (x + 1/2) \cdot (x - 2/3) = (2x + 1) \cdot (3x - 1)$
- b) $5x^2 - 6x + 5 =$ No se puede, es irreducible.
- c) $15x^2 + 2x - 8 = (3x - 2) \cdot (5x + 4)$
- d) $P(x) = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 1/3) \cdot 3 = 3x^3 - x^2 - 3x + 1$

Ejercicio 2:

- a) $x^2 + 9 =$ No es una diferencia de cuadrados.
- b) $50x^2 - 8 = 2 \cdot (5x + 2) \cdot (5x - 2)$
- c) $9x^2 - 2 = (3x + \sqrt{2}) \cdot (3x - \sqrt{2})$
- d) $x^5 - x = x \cdot (x^2 + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$

Ejercicio 4:

- a) $x^2 - 4x - 12 = (x + 2) \cdot (x - 6)$
- b) $x^2 + 5 - 6x = (x - 1) \cdot (x - 5)$
- c) $x^2 + 2x + 3 =$ No se puede.
- d) $x^2 - 2x - 35 = (x + 5) \cdot (x - 7)$

Ejercicio 6:

- a) $x^3 - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$
- b) $2x^3 - 5x^2 - 9 = (x - 3) \cdot (2x^2 + x + 3)$
- c) $x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1) \cdot (x - 2)^2$
- d) $x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = (x - 1)^3 \cdot (x + 1)$