

1. **[2 puntos]** Dada la siguiente función definida por trozos,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2}{x^2-4} & \text{si } x \leq -2 \\ x-3 & \text{si } -2 < x \leq 4 \\ \frac{kx-5}{x-1} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

- a) Estudiar la continuidad de f en el punto $x = -2$. Caso de no ser continua, decir el tipo de discontinuidad.
b) Hallar el valor de k para que f sea continua en el punto $x = 4$.

2. **[2 puntos]** Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2-1} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x\sqrt{x} - \sqrt{x^3+1} \right)$

3. Dada la función $f(x) = \frac{x^2-1}{2x^2-x+1}$, se pide:

- a) **[1,5 puntos]** Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
b) **[0,5 puntos]** Puntos de corte con los ejes.
c) **[1 punto]** Representación gráfica aproximada. Representa también las asíntotas con trazo discontinuo.
4. **[1 punto]** Hallar la recta tangente a la gráfica de la función del ejercicio anterior en el punto $x = -2$.
5. **[3 puntos]** Calcular la derivada de las siguientes funciones. Simplificar y racionalizar el resultado.

a) $y = \left(1 + \sqrt{x^2+1} \right)^2$

b) $y = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

Nota. Cada apartado se calificará del siguiente modo: **0,5 puntos** el cálculo de la derivada (primer paso); **1 punto** la simplificación y racionalización del resultado. Si el cálculo de la derivada es incorrecto se calificará con **0 puntos**.

Soluciones

1. [2 puntos] Dada la siguiente función definida por trozos,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2}{x^2-4} & \text{si } x \leq -2 \\ x-3 & \text{si } -2 < x \leq 4 \\ \frac{kx-5}{x-1} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de f en el punto $x = -2$. Caso de no ser continua, decir el tipo de discontinuidad.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-x^2}{x^2-4} = \left[\frac{-4}{0} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} (x-3) = -5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x). \text{ Esto quiere decir que no existe el}$$

límite cuando x tiende a 4 , con lo que f no es continua en $x = 4$: hay una discontinuidad de salto infinito.

b) Hallar el valor de k para que f sea continua en el punto $x = 4$.

$$\text{Por un lado } \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (x-3) = 1 = f(4). \text{ Por otro lado } \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{kx-5}{x-1} = \frac{4k-5}{3}$$

$$\text{Por tanto, } \frac{4k-5}{3} = 1 \Rightarrow 4k-5 = 3 \Rightarrow 4k = 8 \Rightarrow k = 2.$$

2. [2 puntos] Calcular los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2-1} \right) = [\text{INDET } \infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1(x+1)-x}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \left[\frac{1}{0} \right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 1^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 1^+ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x\sqrt{x} - \sqrt{x^3+1}) &= [\text{INDET } \infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x\sqrt{x} - \sqrt{x^3+1})(x\sqrt{x} + \sqrt{x^3+1})}{x\sqrt{x} + \sqrt{x^3+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - (x^3+1)}{x\sqrt{x} + \sqrt{x^3+1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x\sqrt{x} + \sqrt{x^3+1}} = \frac{-1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

3. Dada la función $f(x) = \frac{x^2-1}{2x^2-x+1}$, se pide:

a) [1,5 puntos] Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

Es fácil comprobar que $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, ya que el denominador nunca se anula: $2x^2 - x + 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

De lo anterior se deduce que la función no tiene asíntotas verticales.

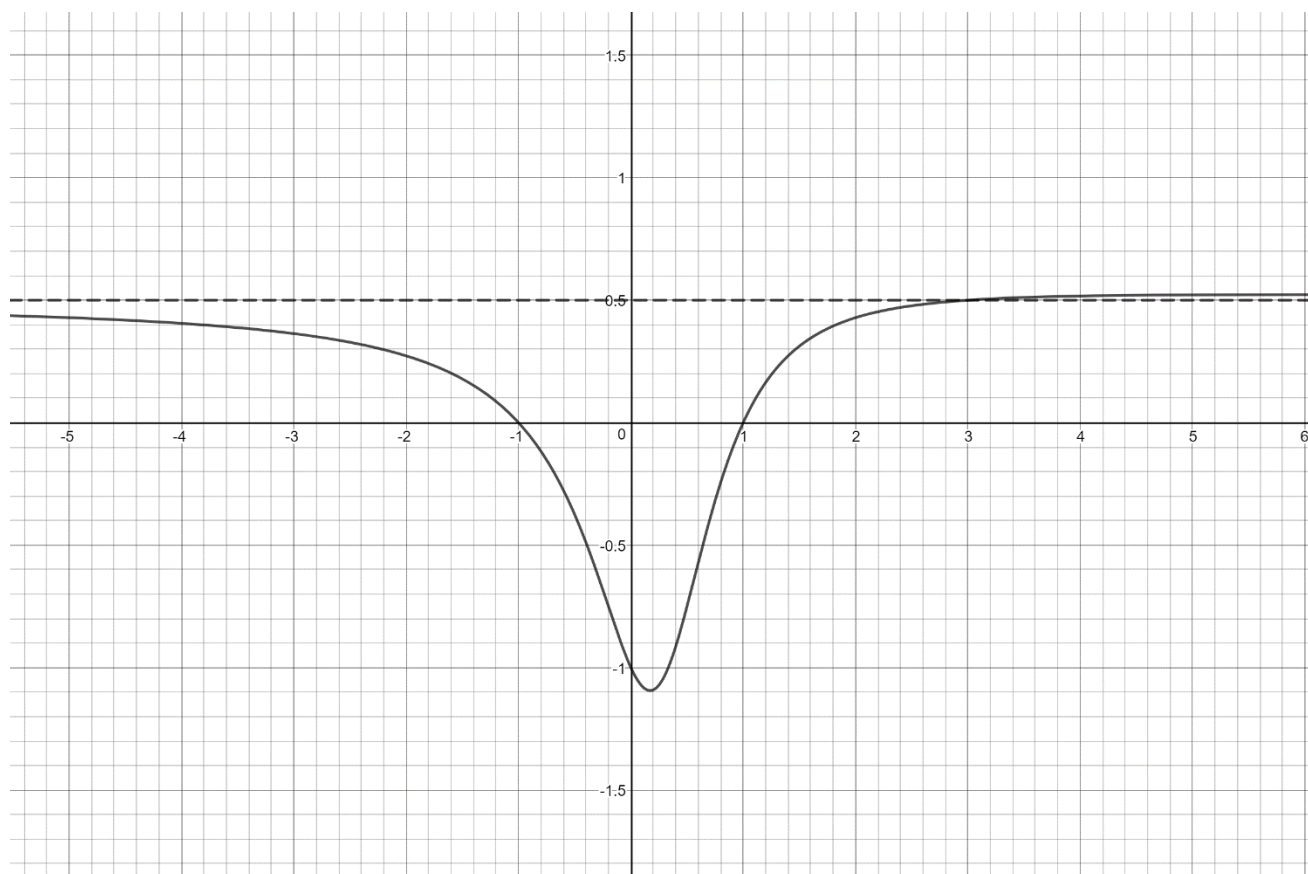
Estudiemos los límites en $+\infty$ y en $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x+1} = \frac{1}{2}$. Entonces $y = \frac{1}{2}$ es una asíntota horizontal. La función, al tener una asíntota horizontal, no puede tener asíntotas oblicuas.

b) [0,5 puntos] Puntos de corte con los ejes.

$$\frac{x^2-1}{2x^2-x+1} = 0 \Rightarrow x^2-1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}. \text{ Entonces los cortes con el eje } X \text{ son } (-1, 0) \text{ y } (1, 0).$$

$$\text{Si } x = 0 \text{ tenemos: } y = \frac{0^2-1}{2 \cdot 0^2 - 0 + 1} = \frac{-1}{1} \Rightarrow y = -1. \text{ Por tanto, el punto de corte con el eje } Y \text{ es } (0, -1).$$

c) [1 punto] Representación gráfica aproximada. Representa también las asíntotas con trazo discontinuo



4. [1 punto] Hallar la recta tangente a la gráfica de la función del ejercicio anterior en el punto $x = -2$.

La recta tangente es $y - f(-2) = f'(-2)(x + 2)$. Se tiene que $f(-2) = \frac{4-1}{8+2+1} = \frac{3}{11}$. Por otro lado:

$$f'(x) = \frac{2x(2x^2 - x + 1) - (x^2 - 1)(4x - 1)}{(2x^2 - x + 1)^2} = \frac{4x^3 - 2x^2 + 2x - 4x^3 + x^2 + 4x - 1}{(2x^2 - x + 1)^2} = \frac{-x^2 + 6x - 1}{(x^2 - x - 6)^2}$$

Entonces $f'(-2) = \frac{-4 - 12 - 1}{(8 + 2 + 1)^2} = \frac{-17}{121}$. Por tanto, la recta tangente en $x = -2$ es $y - \frac{3}{11} = \frac{-17}{121}(x + 2)$.

5. [3 puntos] Calcular la derivada de las siguientes funciones. Simplificar y racionalizar el resultado.

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= (1 + \sqrt{x^2 + 1})^2; \quad y' = 2(1 + \sqrt{x^2 + 1}) \left(\frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x \right) = (2 + 2\sqrt{x^2 + 1}) \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x + 2\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \\ &= \frac{(2x + 2\sqrt{x^2 + 1})\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + 1} = \frac{2x\sqrt{x^2 + 1} + 2x^2 + 2}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y &= \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}; \quad y' = \frac{\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\sqrt{x} - (x + \sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{2} - \frac{x}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}}{x} = \frac{2x - x}{2\sqrt{x}} = \\ &= \frac{x}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2x} \end{aligned}$$