

1. **[1 punto]** Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1} & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } x = -1 \\ x^2 + 2x & \text{si } -1 < x < 2 \\ ax - x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, estudia la continuidad de f en $x = -1$ y halla el

valor de a para que f sea continua en $x = 2$.

2. **[1 punto]** Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} + \frac{1}{x-1}}{x}$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x^2}{x-3} - \frac{1-x^3}{x^2-9} \right)$

3. **[3 puntos]** De la función siguiente calcula las asíntotas, los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Representala gráficamente.

$$f(x) = \frac{-2x^2}{x^2 - 2x - 8}$$

Puntuación del ejercicio.

Cálculo de las asíntotas: **1 punto**. Máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento: **1 punto**. Representación gráfica: **1 punto**.

4. **[1 punto]** Halla la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2 + 4}{\sqrt{x}}$ en el punto $x = 1$.
5. **[1 punto]** Halla una función polinómica de segundo grado sabiendo que pasa por el punto $(1, -1)$ y que la pendiente de la recta tangente en el punto $(0, -3)$ vale 0.
6. **[3 puntos]** Hallar la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado en la medida de lo posible:

a) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{2x+1}{x+3}}$; b) $f(x) = \frac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} - x}$; c) $f(x) = \ln \left(\frac{\cos x + 1}{\sin x} \right)$

Soluciones

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1} & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } x = -1 \\ x^2 + 2x & \text{si } -1 < x < 2 \\ ax - x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Por un lado tenemos: $\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{-2} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 + 2x) = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1$. Por otro lado $f(-1) = 2$. Como

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1 \neq f(-1) = 2$, la función no es continua en $x = -1$. Hay una discontinuidad evitable.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 2x) = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax - x^2) = 2a - 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{para que } f \text{ sea continua en } x = 2 \text{ debe de ocurrir que}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow 2a - 4 = 8 \Rightarrow 2a = 12 \Rightarrow a = 6.$$

2. Calcular los siguientes límites:

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} + \frac{1}{x-1}}{x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)\sqrt{x+1} + 1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((x-1)\sqrt{x+1} + 1)((x-1)\sqrt{x+1} - 1)}{x(x-1)((x-1)\sqrt{x+1} - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)^2(x+1) - 1}{x(x-1)((x-1)\sqrt{x+1} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 - x}{x(x-1)((x-1)\sqrt{x+1} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - x - 1)}{x(x-1)((x-1)\sqrt{x+1} - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x - 1}{(x-1)((x-1)\sqrt{x+1} - 1)} = \frac{-1}{-1 \cdot (-2)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x^2}{x-3} - \frac{1-x^3}{x^2-9} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x^2}{x-3} - \frac{1-x^3}{(x+3)(x-3)} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2(x+3) - (1-x^3)}{(x+3)(x-3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 - 3x^2 - 1 + x^3}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2 - 1}{x^2 - 9} = -3 \end{aligned}$$

3. $f(x) = \frac{-2x^2}{x^2 - 2x - 8}$. Las soluciones de $x^2 - 2x - 8 = 0$ son $x = -2$ y $x = 4$. Entonces $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 4\}$.

Además, es claro que $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x^2}{x^2 - 2x - 8} = \pm\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{-2x^2}{x^2 - 2x - 8} = \pm\infty$, por lo que $x = -2$ y $x = 4$ son asíntotas verticales.

También es claro que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2}{x^2 - 2x - 8} = -2$, por lo que $y = -2$ es una asíntota horizontal.

La función no tiene asíntotas oblicuas (entre otras cosas porque tiene una horizontal).

$$f'(x) = \frac{-4x(x^2 - 2x - 8) - (-2x^2)(2x - 2)}{(x^2 - 2x - 8)^2} = \frac{-4x^3 + 8x^2 + 32x + 4x^3 - 4x^2}{(x^2 - 2x - 8)^2} =$$

$$= \frac{4x^2 + 32x}{(x^2 - 2x - 8)^2} = \frac{4x(x + 8)}{(x^2 - 2x - 8)^2}. \text{ Entonces } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -8$$

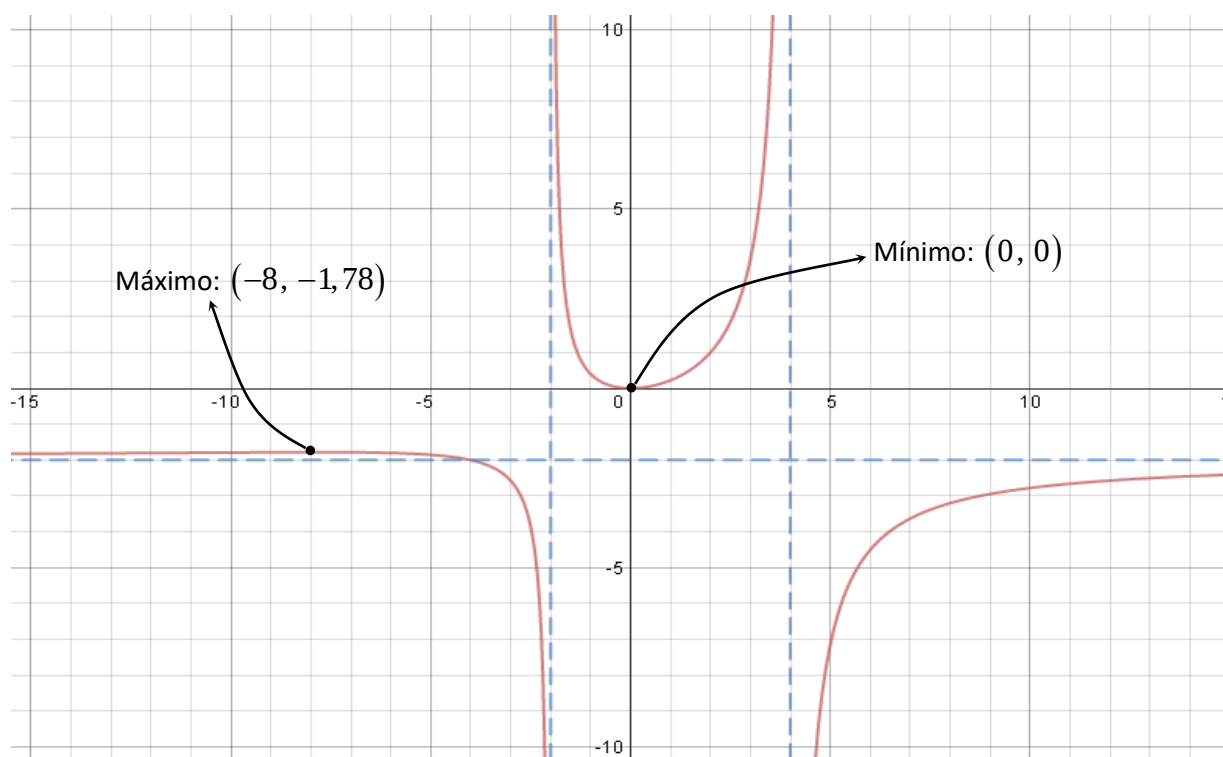
Ahora decidimos la monotonía y los extremos relativos:

	$(-\infty, -8)$	$(-8, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 4)$	$(4, +\infty)$
Signo de f'	-	+	-		
Monotonía	$\uparrow\uparrow$	$\downarrow\downarrow$	$\downarrow\downarrow$	$\uparrow\uparrow$	$\uparrow\uparrow$

De la tabla anterior se deduce que:

- f es estrictamente decreciente en $(-\infty, -8) \cup (0, 4) \cup (4, +\infty)$.
- f es estrictamente creciente en $(-8, -2) \cup (-2, 0)$.
- f tiene un máximo relativo en $x = -8$; concretamente el mínimo relativo es $\left(-8, -\frac{16}{9}\right) = (-8, 1,78)$.
- f tiene un mínimo relativo en $x = 0$; en concreto el máximo relativo es $(0, 0)$.

Representación gráfica:



$$4. \quad f(x) = \frac{x^2 + 4}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x\sqrt{x} - (x^2 + 4) \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2} = \frac{4x^2 - (x^2 + 4)}{2x\sqrt{x}} = \frac{3x^2 - 4}{2x\sqrt{x}}$$

Entonces $f(1) = \frac{1^2 + 4}{\sqrt{1}} = \frac{5}{1} = 5$ y $f'(1) = \frac{3 \cdot 1^2 - 4}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{1}} = \frac{3 - 4}{2} = \frac{-1}{2}$. Por tanto, la ecuación de la recta tangente

en el punto $x = 1$ es: $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 5 = \frac{-1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2} + 5 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$.

5. Una función polinómica de segundo grado es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Su derivada es $f'(x) = 2ax + b$. Como pasa por el punto $(1, -1)$ se tiene que $f(1) = -1$, es decir, $a + b + c = -1$. También pasa por el punto $(0, -3)$ donde la recta tangente vale 0, o sea, $f(0) = -3$ y $f'(0) = 0$. Por tanto $c = -3$ y $b = 0$. Sustituyendo en $a + b + c = -1$, se tiene que $a + 0 + (-3) = -1 \Rightarrow a = 2$. Por tanto la función es $f(x) = 2x^2 - 3$.

6. Derivadas.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \ln \sqrt{\frac{2x+1}{x+3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2x+1}{x+3}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x+1}{x+3}}} \cdot \frac{2(x+3) - (2x+1)1}{(x+3)^2} = \frac{1}{2\frac{2x+1}{x+3}} \cdot \frac{2x+6-2x-1}{(x+3)^2} = \\ &= \frac{x+3}{2(2x+1)} \cdot \frac{5}{(x+3)^2} = \frac{5(x+3)}{2(2x+1)(x+3)^2} = \frac{5}{2(2x+1)(x+3)} \end{aligned}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)(\sqrt{x}-x) - (\sqrt{x}+x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-1\right)}{(\sqrt{x}-x)^2} =$$

$$= \frac{\frac{(1+2\sqrt{x})(\sqrt{x}-x)}{2\sqrt{x}} - \frac{(\sqrt{x}+x)(1-2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-x)^2} = \frac{\sqrt{x}-x+2x-2x\sqrt{x}-\sqrt{x}+2x-x+2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-x)^2} =$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-x)^2} = \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-x)^2} = \frac{x}{\sqrt{x}(x-2x\sqrt{x}+x^2)} = \frac{x}{x\sqrt{x}(1-2\sqrt{x}+x)} = \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f(x) &= \ln \left(\frac{\cos x + 1}{\sin x} \right) \Rightarrow \frac{1}{\frac{\cos x + 1}{\sin x}} \cdot \frac{-\sin x \sin x - (\cos x + 1) \cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x + 1} \cdot \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x - \cos x}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{\sin x}{\cos x + 1} \cdot \frac{-1 - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x(-1 - \cos x)}{(\cos x + 1)\sin^2 x} = \frac{-(1 + \cos x)}{(\cos x + 1)\sin x} = \frac{-1}{\sin x} \end{aligned}$$