1. **[2 puntos]** Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-3} & \text{si} \quad x\le -2 \\ -x^3+x-7 & \text{si} \quad -2<x<1 \\ \dfrac{3x^2-2}{x} & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$, estudiar la continuidad de la función en los puntos $x=-2$ y en $x=1$.

2. **[1 punto]** Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$; b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-3}-\dfrac{x^2-1}{x+3}\right)$

3. **[3 puntos]** De la función siguiente calcula las asíntotas, los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Represéntala gráficamente.

$$f(x)=\frac{-2x^2}{x^2-2x-8}$$

   Puntuación del ejercicio.
   Cálculo de las asíntotas: **1 punto**. Máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento: **1 punto**. Representación gráfica: **1 punto**.

4. **[1 punto]** Halla la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x}{1-2\sqrt{x}}$ en el punto $x=1$.

5. **[3 puntos]** Hallar la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado en la medida de lo posible:

   a) $f(x)=\ln\sqrt{1-\sqrt{x}}$; b) $f(x)=\dfrac{\ln x}{\operatorname{sen} x}$; c) $f(x)=\ln\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x}\right)$

Soluciones

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x-3} & \text{si} \quad x\le -2\\ -x^3+x-7 & \text{si} \quad -2<x<1\\ \dfrac{3x^2-2}{x} & \text{si} \quad x\ge 1\end{cases}$; $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\left(\dfrac{x^2+1}{x-3}\right)=\dfrac{5}{-5}=-1\\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\left(-x^3+x-7\right)=-(-8)+(-2)-7=-1\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to -2} f(x)=-1$. Además, también $f(-2)=-1$. Por tanto $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2)=-1$, con lo que f es continua en $x=-2$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-x^3+x-7\right)=-1+1-7=-7\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{3x^2-2}{x}\right)=\dfrac{1}{1}=1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\ne \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, por tanto no existe el límite de la función en $x=1$, con lo que f no es continua en $x=1$. Hay una discontinuidad de salto finito.

2. Calcular los siguientes límites:

a) $$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x-\sqrt{x}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)}{\left(x^2-x\right)\left(x+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}^2}{\left(x^2-x\right)\left(x+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{\left(x^2-x\right)\left(x+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+\sqrt{x}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2}{x-3}-\frac{x^2-1}{x+3}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2(x+3)}{(x+3)(x-3)}-\frac{\left(x^2-1\right)(x-3)}{(x+3)(x-3)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^3+3x^2}{(x+3)(x-3)}-\frac{x^3-3x^2-x+3}{(x+3)(x-3)}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{6x^2+x-3}{x^2-9}=6$$

3. $f(x)=\dfrac{-2x^2}{x^2-2x-8}$. Las soluciones de $x^2-2x-8=0$ son $x=-2$ y $x=4$. Entonces $\mathrm{Dom}\ f=\mathbb{R}-\{-2\ ,\ 4\}$.

Además, es claro que $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{-2x^2}{x^2-2x-8}=\pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-2x^2}{x^2-2x-8}=\pm\infty$, por lo que $x=-2$ y $x=4$ son asíntotas verticales.

También es claro que $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{-2x^2}{x^2-2x-8}=-2$, por lo que $y=-2$ es una asíntota horizontal.

La función no tiene asíntotas oblicuas (entre otras cosas porque tiene una horizontal).

$$f'(x)=\frac{-4x\left(x^2-2x-8\right)-\left(-2x^2\right)(2x-2)}{\left(x^2-2x-8\right)^2}=\frac{-4x^3+8x^2+32x+4x^3-4x^2}{\left(x^2-2x-8\right)^2}=$$

$=\dfrac{4x^2+32x}{\left(x^2-2x-8\right)^2}=\dfrac{4x(x+8)}{\left(x^2-2x-8\right)^2}$. Entonces $f'(x)=0\Leftrightarrow 4x(x+8)=0\Leftrightarrow x=0\ ;\ x=-8$

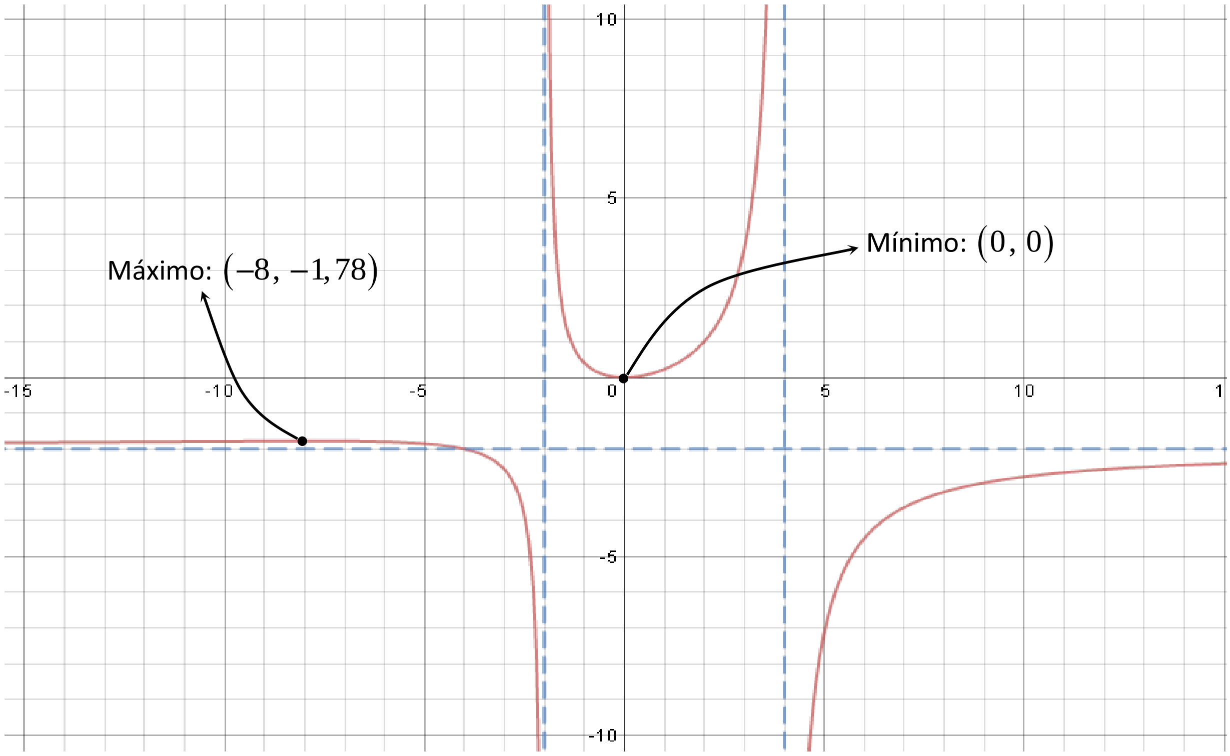
Ahora decidimos la monotonía y los extremos relativos:

	$(-\infty, -8)$	$(-8, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 4)$	$(4, +\infty)$
Signo de f'	**+**	**–**	**–**	**+**	**+**
Monotonía	$\uparrow\uparrow$	$\downarrow\downarrow$	$\downarrow\downarrow$	$\uparrow\uparrow$	$\uparrow\uparrow$

De la tabla anterior se deduce que:

- f es estrictamente creciente en $(-\infty, -8) \cup (0, 4) \cup (4, +\infty)$.
- f es estrictamente decreciente en $(-8, -2) \cup (-2, 0)$.
- f tiene un máximo relativo en $x = -8$; concretamente el mínimo relativo es $\left(-8, -\frac{16}{9}\right) = (-8, 1{,}78)$.
- f tiene un mínimo relativo en $x = 0$; en concreto el máximo relativo es $(0, 0)$.

Representación gráfica:



4. $f(x) = \dfrac{x}{1-2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1\cdot\left(1-2\sqrt{x}\right) - x\cdot\left(-2\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(1-2\sqrt{x}\right)^2} = \dfrac{1-2\sqrt{x}+\dfrac{x}{\sqrt{x}}}{\left(1-2\sqrt{x}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{x}-2x+x}{\sqrt{x}\left(1-2\sqrt{x}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}\left(1-2\sqrt{x}\right)^2}$.

Por tanto, se tiene que $f(1) = \dfrac{1}{1-2} = -1$, y que $f'(1) = \dfrac{1-1}{1\cdot(-1)^2} = 0$. Por tanto, la recta tangente en $x = 1$ es:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y-(-1) = 0(x-1) \Rightarrow y+1 = 0 \Rightarrow y = -1$$

No se pide en el ejercicio, pero es interesante mostrar que de lo anterior se deduce que en el punto $x = 1$ la gráfica de f tienen tangente horizontal, con lo que es muy probable que $x = 1$ sea un extremo relativo.

5. Derivadas:

a) $f(x)=\ln\sqrt{1-\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1-\sqrt{x}}}\cdot\dfrac{-1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{-1}{4\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}$

Así está bien, aunque también se puede expresar la derivada de la siguiente manera:

$$f'(x)=\frac{-1}{4\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}=\frac{-1}{4\sqrt{x}-4x}=\frac{-1\left(4\sqrt{x}+4x\right)}{\left(4\sqrt{x}-4x\right)\left(4\sqrt{x}+4x\right)}=\frac{-4\sqrt{x}-4x}{16x-16x^2}=\frac{-\sqrt{x}-x}{4x-4x^2}=\frac{x+\sqrt{x}}{4x^2-4x}$$

Hay otra forma de hacer la derivada, aplicando previamente las propiedades de los logaritmos:

$$f(x)=\ln\sqrt{1-\sqrt{x}}=\ln\left(1-\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln\left(1-\sqrt{x}\right)$$

Entonces: $f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\dfrac{-1}{4\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}$

b) $f(x)=\dfrac{\ln x}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot\operatorname{sen} x-\ln x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}=\dfrac{\operatorname{sen} x-x\ln x\cos x}{x\operatorname{sen}^2 x}$

c) $f(x)=\ln\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x}\right) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{e^x}}\cdot\dfrac{\cos x\cdot e^x-\operatorname{sen} x\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2}=\dfrac{e^x}{\operatorname{sen} x}\cdot\dfrac{e^x\left(\cos x-\operatorname{sen} x\right)}{\left(e^x\right)^2}=$

$$=\frac{\left(e^x\right)^2\left(\cos x-\operatorname{sen} x\right)}{\operatorname{sen} x\left(e^x\right)^2}=\frac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}=\operatorname{ctg} x-1$$

Hay otra forma de hacer la derivada, aplicando previamente las propiedades de los logaritmos:

$$f(x)=\ln\left(\frac{\operatorname{sen} x}{e^x}\right)=\ln\left(\operatorname{sen} x\right)-\ln e^x=\ln\left(\operatorname{sen} x\right)-x$$

Entonces: $f'(x)=\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x-1=\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}-1=\operatorname{ctg} x-1$