

1. **[2 puntos]** Sea la siguiente función.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+3a}{10} & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x+1}{7x+5} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) Halla el valor de a para que f sea continua en $x=0$.
b) Estudiar la continuidad de f en $x=1$.

2. **[2 puntos]** Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x^2 + 7x + 1}{(2x+1)(1-4x)}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x+1} \right)$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} \right)$; d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{x}}{x-1}$

3. **[3 puntos]** De la función siguiente calcular el dominio, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas. Hacer una representación gráfica aproximada de la misma.

$$f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^2 - 2x - 15}$$

4. **[1 punto]** Hallar, usando la definición, la derivada de la función $f(x) = \frac{x-3x^2}{1-2x^2}$ en el punto $x=1$.

5. **[2 puntos]** Hallar la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado en la medida de lo posible:

a) $f(x) = \frac{5x^2 + 2x^3 - 10x + 1}{5}$; b) $f(x) = \frac{x-3x^2}{1-2x^2}$; c) $f(x) = x^2 \cdot (\sqrt{x} - 1)$; d) $f(x) = \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^3} \right) \cdot x^2$

Soluciones

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x+3a}{10} & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x+1}{7x+5} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$a) \quad \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+3a}{10} = \frac{3a}{10} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+1}{7x+5} = \frac{1}{5} = f(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{para que } f \text{ sea continua en } x=0 \text{ debe de ocurrir que}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \frac{3a}{10} = \frac{1}{5} \Rightarrow a = \frac{10}{15} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+1}{7x+5} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Como los límites laterales son iguales, entonces existe el límite: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{4}$. Además $f(1) = \frac{1}{4}$. Por

tanto $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \frac{1}{4}$, y f es continua en $x=1$.

2. Calcular los siguientes límites:

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x^2+7x+1}{(2x+1)(1-4x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x^2+7x+1}{-8x^2-2x+1} = \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2}$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x+1)-3x}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x+2}{x(x+1)} = \left[\frac{2}{0} \right] = -\infty$$

Pero es más fácil hacerlo así: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x+1} \right) = -\infty - 3 = -\infty$

$$\begin{aligned} c) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} \right) &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-x^2+x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{x}}{x-1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - 1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x\sqrt{x}-1)(x\sqrt{x}+1)}{x(x-1)(x\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x(x-1)(x\sqrt{x}+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)(x\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1}{x(x\sqrt{x}+1)} = \frac{3}{2}$$

$$3. f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^2 - 2x - 15}.$$

Las soluciones de $x^2 - 2x - 15 = 0$ son $x = -3$ y $x = 5$. Por tanto $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3, 5\}$.

$$\frac{x^3 - 27}{x^2 - 2x - 15} = 0 \Rightarrow x^3 - 27 = 0 \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3. \text{ Punto de corte con el eje } X : (3, 0).$$

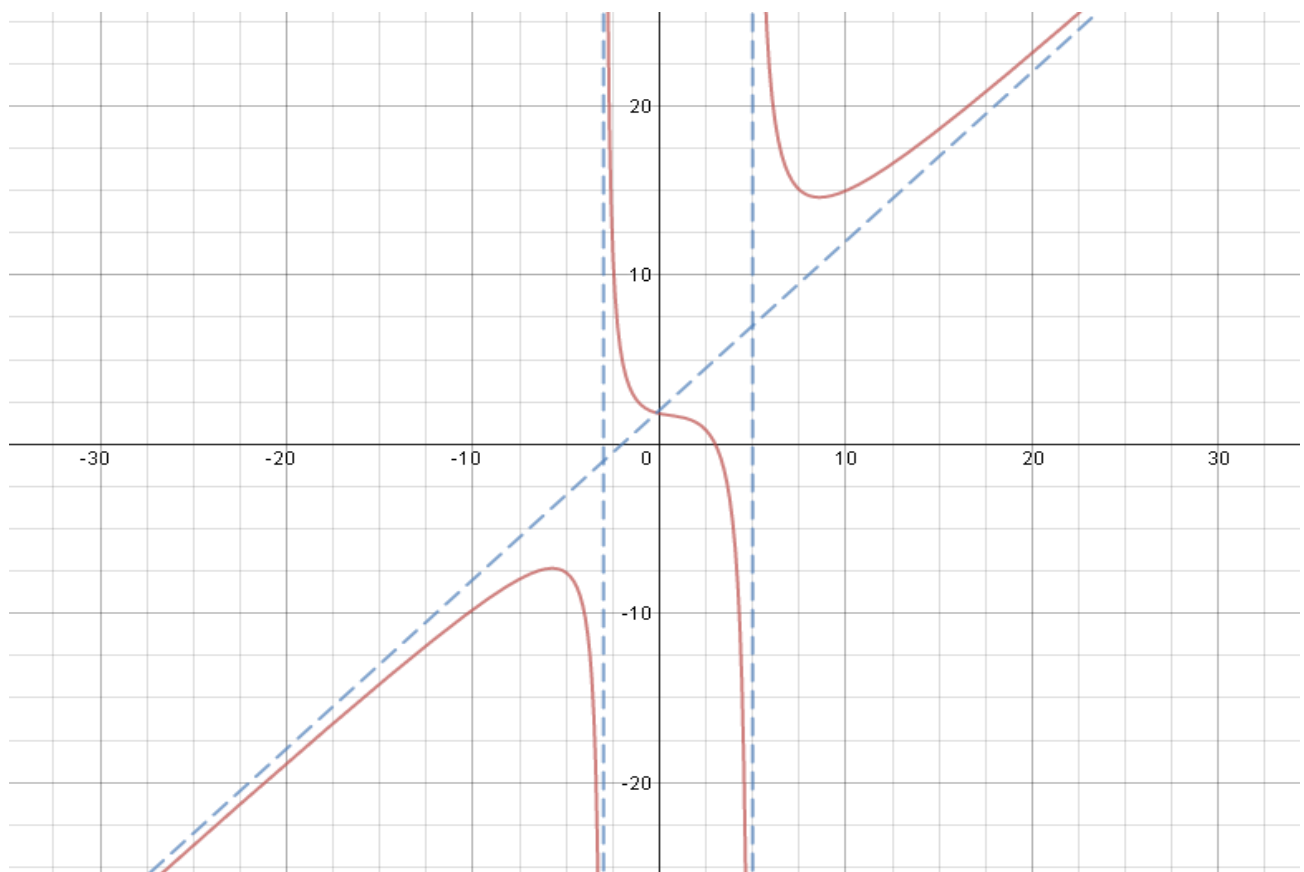
$$\frac{0^3 - 27}{0^2 - 2 \cdot 0 - 15} = \frac{-27}{-15} = \frac{9}{5}. \text{ Punto de corte con el eje } Y : \left(0, \frac{9}{5}\right).$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 2x - 15} = \left[\frac{-54}{0} \right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow -3^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow -3^+ \end{cases}; \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 2x - 15} = \frac{98}{0} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 5^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 5^+ \end{cases}$$

De lo anterior se deduce que $x = -3$ y $x = 5$ son asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 2x - 15} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow +\infty \\ -\infty & \text{si } x \rightarrow -\infty \end{cases} \Rightarrow f \text{ no tiene asíntotas horizontales.}$$

Al dividir $x^3 - 27$ entre $x^2 - 2x - 15$ se obtiene de cociente $x + 2$, lo que significa que $y = x + 2$ es una asíntota oblicua.



$$4. \quad f(x) = \frac{x-3x^2}{1-2x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x-3x^2}{1-2x^2} - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x-3x^2-2(1-2x^2)}{1-2x^2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3x^2-2+4x^2}{(x-1)(1-2x^2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)(1-2x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(1-2x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{1-2x^2} = \frac{3}{-1} = -3. \text{ Entonces } f'(1) = -3.$$

5. Hallar la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado en la medida de lo posible:

$$a) \quad f(x) = \frac{5x^2 + 2x^3 - 10x + 1}{5} = \frac{1}{5}(5x^2 + 2x^3 - 10x + 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{5}(10x + 6x^2 - 10) = 2x + \frac{6}{5}x^2 - 2$$

Otra forma (más enrevesada, usando la regla de derivación de un cociente):

$$f'(x) = \frac{(10x + 6x^2 - 10) \cdot 5 - (5x^2 + 2x^3 - 10x + 1) \cdot 0}{5^2} = \frac{50x + 30x^2 - 50}{25} = 2x + \frac{6}{5}x^2 - 2$$

$$b) \quad f(x) = \frac{x-3x^2}{1-2x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(1-6x)(1-2x^2) - (x-3x^2)(-4x)}{(1-2x^2)^2} =$$

$$= \frac{1-2x^2-6x+12x^3+4x^2-12x^3}{(1-2x^2)^2} = \frac{2x^2-6x+1}{(1-2x^2)^2}$$

$$c) \quad f(x) = x^2 \cdot (\sqrt{x} - 1) \Rightarrow f'(x) = 2x(\sqrt{x} - 1) + x^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x} - 2x + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{4x^2 - 4x\sqrt{x} + x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 - 4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2\sqrt{x} - 4x^2}{2x} = \frac{5x\sqrt{x} - 4x}{2}$$

Otra forma, expresando previamente la función de otra manera equivalente:

$$f(x) = x^2 \cdot (\sqrt{x} - 1) = x^2\sqrt{x} - x^2 = x^2 \cdot x^{1/2} - x^2 = x^{5/2} - x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{5}{2}x^{3/2} - 2x = \frac{5}{2}\sqrt{x^3} - 2x = \frac{5x\sqrt{x}}{2} - 2x = \frac{5x\sqrt{x} - 4x}{2}$$

$$d) \quad f(x) = \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \cdot x^2 = \frac{2x^2}{x} - \frac{x^2}{x^3} = 2x - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{-1}{x^2} = \frac{2x^2 + 1}{x^2}$$

Otra forma:

$$f(x) = \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \cdot x^2 = \frac{2x^2-1}{x^3} \cdot x^2 = \frac{(2x^2-1)x^2}{x^3} = \frac{2x^2-1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{4x \cdot x - (2x^2-1) \cdot 1}{x^2} = \frac{4x^2 - 2x^2 + 1}{x^2} = \frac{2x^2 + 1}{x^2}$$