1. **[2 puntos]** Dada la siguiente función definida por trozos,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{kx+1}{x^2-1} & \text{si} \quad x\le -2\\ 2x+3 & \text{si} \quad -2<x\le 4\\ \dfrac{3x-5}{-x+4} & \text{si} \quad x>4\end{cases}$$

   a) Hallar el valor de k para que f sea continua en el punto $x=-2$.

   b) Estudiar la continuidad de f en el punto $x=4$. Caso de no ser continua, decir el tipo de discontinuidad.

2. **[2 puntos]** Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{8}{x^2-4}\right)$

   b) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

3. Dada la función $f(x)=\dfrac{3x^2-3x-6}{x^2-x-6}$, se pide:

   a) **[1,5 puntos]** Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

   b) **[0,5 puntos]** Puntos de corte con los ejes.

   c) **[1 punto]** Representación gráfica aproximada. Representa también las asíntotas con trazo discontinuo.

4. **[1 punto]** Hallar la recta tangente a la gráfica de la función del ejercicio anterior en el punto $x=-3$.

5. **[3 puntos]** Calcular la derivada de las siguientes funciones. Simplificar y ***racionalizar*** el resultado.

   a) $y=\left(-\sqrt{1-x^2}\right)^3$

   b) $y=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

   Nota. Cada apartado se calificará del siguiente modo: **0,5 puntos** el cálculo de la derivada (primer paso); **1 punto** la simplificación y racionalización del resultado. Si el cálculo de la derivada es incorrecto se calificará con **0 puntos**.

Soluciones

1. **[2 puntos]** Dada la siguiente función definida por trozos,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{kx+1}{x^2-1} & \text{si} \quad x\le -2\\ 2x+3 & \text{si} \quad -2<x\le 4\\ \dfrac{3x-5}{-x+4} & \text{si} \quad x>4\end{cases}$$

   a) Hallar el valor de k para que f sea continua en el punto $x=-2$.

   Para que f sea continua en $x=-2$ se debe verificar que $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2)$

   Por un lado $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{kx+1}{x^2-1}=\dfrac{-2k+1}{3}=f(-2)$. Por otro lado $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}(2x+3)=-1$

   Por tanto $\dfrac{-2k+1}{3}=-1\Rightarrow -2k+1=-3\Rightarrow -2k=-4\Rightarrow k=2$.

   b) Estudiar la continuidad de f en el punto $x=4$. Caso de no ser continua, decir el tipo de discontinuidad.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(2x+3)=11\\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{3x-5}{-x+4}=\left[\dfrac{7}{0}\right]=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 4^-} f(x)\ne \lim_{x\to 4^+} f(x)$$

   . Esto quiere decir que no existe el límite cuando x tiende a 4, con lo que f no es continua en $x=4$: hay una discontinuidad de salto infinito.

2. **[2 puntos]** Calcular los siguientes límites:

   a) $$\lim_{x\to -2}\left(\frac{x}{x+2}-\frac{8}{x^2-4}\right)=\left[\text{INDET } \infty-\infty\right]=\lim_{x\to -2}\frac{x(x-2)-8}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{(x+2)(x-2)}=\left[\text{INDET } \frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-4}{x-2}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$$

   b) $$\lim_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\left[\text{INDET } \infty-\infty\right]=\lim_{x\to +\infty}\frac{x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x\left(x^2+1-x^2\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

3. Dada la función $f(x)=\dfrac{3x^2-3x-6}{x^2-x-6}$, se pide:

   a) **[1,5 puntos]** Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

   Es fácil comprobar que $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{-2,3\}$. Estudiemos pues los límites en los puntos $x=-2$ y $x=3$:

$$\lim_{x\to -2}\frac{3x^2-3x-6}{x^2-x-6}=\left[\frac{12}{0}\right]=\begin{cases}+\infty & \text{si} \quad x\to -2^-\\ -\infty & \text{si} \quad x\to -2^+\end{cases} \; ; \; \lim_{x\to 3}\frac{3x^2-3x-6}{x^2-x-6}=\left[\frac{10}{0}\right]=\begin{cases}-\infty & \text{si} \quad x\to 3^-\\ +\infty & \text{si} \quad x\to 3^+\end{cases}$$

   De lo anterior se deduce que $x=-2$ y $x=3$ son asíntotas verticales.

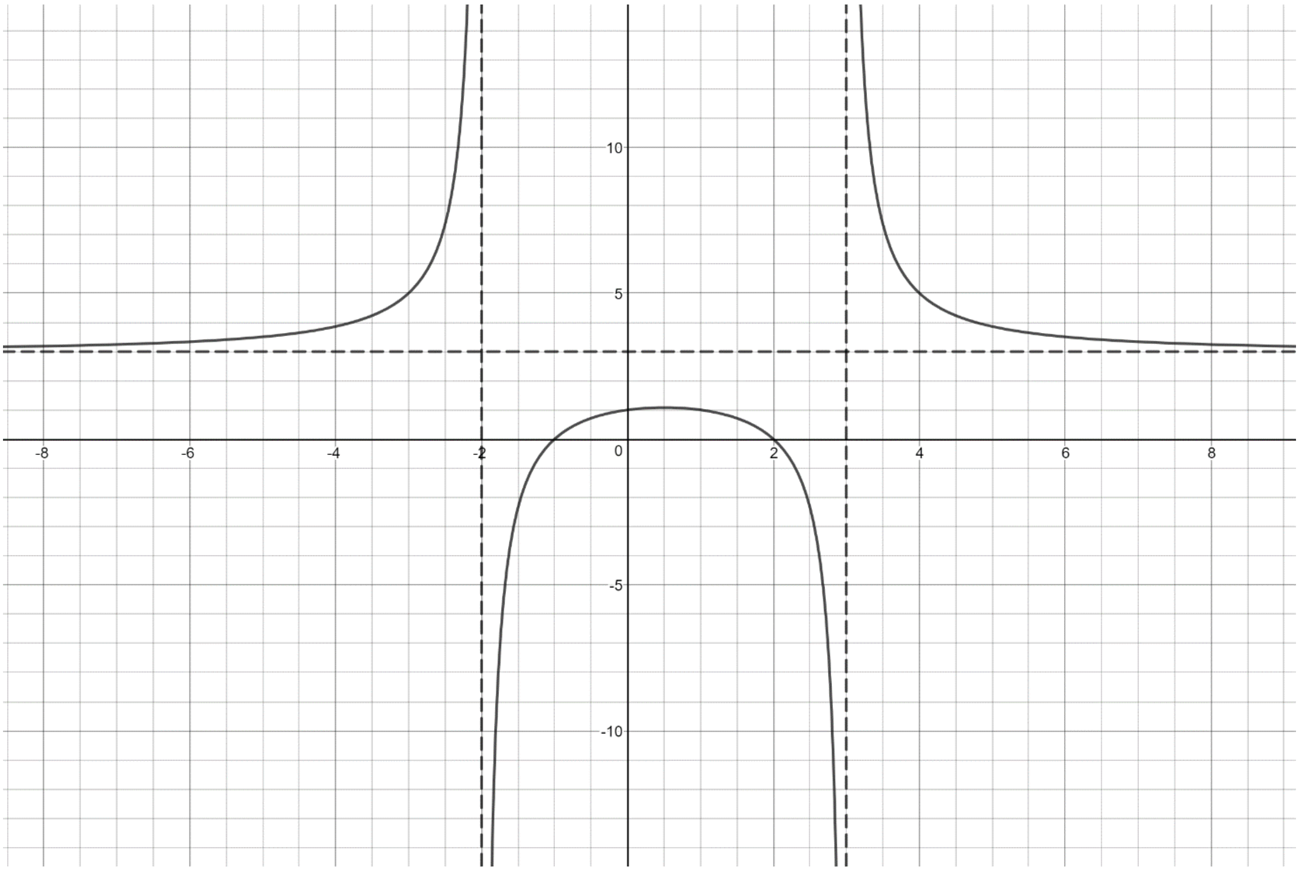
   Estudiemos los límites en $+\infty$ y en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2-3x-6}{x^2-x-6}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2-3x-6}{x^2-x-6}=3$. Entonces $y=3$ es una asíntota horizontal. La función, al tener una asíntota horizontal, no puede tener asíntotas oblicuas.

   b) **[0,5 puntos]** Puntos de corte con los ejes.

   $\dfrac{3x^2-3x-6}{x^2-x-6}=0\Rightarrow 3x^2-3x-6=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=-1\\ x_2=2\end{cases}$. Entonces los corte con el eje X son $(-1,0)$ y $(2,0)$.

   Si $x=0$ tenemos que $y=1$. Por tanto, el punto de corte con el eje Y es $(0,1)$.

c) **[1 punto]** Representación gráfica aproximada. Representa también las asíntotas con trazo discontinuo.



4. **[1 punto]** Hallar la recta tangente a la gráfica de la función del ejercicio anterior en el punto $x=-3$.

La recta tangente es $y-f(-3)=f'(-3)(x+3)$. Se tiene que $f(-3)=\dfrac{27+9-6}{9+3-6}=\dfrac{30}{6}=5$. Hallemos ahora la derivada de f: $f'(x)=\dfrac{(6x-3)(x^2-x-6)-(3x^2-3x-6)(2x-1)}{(x^2-x-6)^2}=$

$$=\frac{6x^3-6x^2-36x-3x^2+3x+18-6x^3+3x^2+6x^2-3x+12x-6}{(x^2-x-6)^2}=\frac{-24x+12}{(x^2-x-6)^2}$$

Entonces $f'(-3)=\dfrac{72+12}{(9+3-6)^2}=\dfrac{84}{36}=\dfrac{7}{3}$. Por tanto, la recta tangente en $x=-3$ es $y-5=\dfrac{7}{3}(x+3)$.

5. **[3 puntos]** Calcular la derivada de las siguientes funciones. Simplificar y ***racionalizar*** el resultado.

a) $y=\left(-\sqrt{1-x^2}\right)^3$; $y'=3\left(-\sqrt{1-x^2}\right)^2\cdot\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\right)\cdot(-2x)=3(1-x^2)\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{3x(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=$

$$=\frac{3x(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}=3x\sqrt{1-x^2}$$

b) $y=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}$; $y'=\dfrac{2\sqrt{x}-(2x-1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2\sqrt{x}-\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x}}}{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{\dfrac{4x-2x+1}{2\sqrt{x}}}{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=$

$$=\frac{2x+1}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2x+1-x}{2x\sqrt{x}}=\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}=\frac{(x+1)\sqrt{x}}{2x^2}$$