

1. **[1 punto]** Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{bx-1} & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2+2ax & \text{si } -1 < x < 2, \\ 2x^2-ax & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, halla los valores de a y b para que f sea

continua en $x = -1$ y en $x = 2$.

2. **[1 punto]** Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x-3} - \sqrt{x-1}}{x-2}$; b) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9} \right)$

3. **[3 puntos]** De la función siguiente calcula las asíntotas, los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Representala gráficamente.

$$f(x) = \frac{5x+8}{x^2+x+1}$$

Puntuación del ejercicio.

Cálculo de las asíntotas: **1 punto**. Máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento: **1 punto**. Representación gráfica: **1 punto**.

4. **[1 punto]** Halla la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-2x}$ en el punto $x = 1$.
5. **[1 punto]** Dada $g(x) = ax^4 + bx + c$, calcula los valores de a , b y c para que $g(x)$ tenga en el punto $(1, -1)$ un máximo relativo y la recta tangente a la gráfica de $g(x)$, en $x = 0$, sea paralela a la recta $y = 4x$.
6. **[3 puntos]** Hallar la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado en la medida de lo posible:

a) $f(x) = \frac{2(\sqrt{x}+2)^2}{\sqrt{x}+1}$; b) $f(x) = \ln\left(\ln \frac{1}{x}\right)$; c) $f(x) = \ln(\sin x) - \frac{x \cos x}{\sin x}$

Nota: en el apartado b), o bien antes de hacer la derivada, o bien a la hora de simplificarla, puedes utilizar las propiedades de los logaritmos

Soluciones

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{bx-1} & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2+2ax & \text{si } -1 < x < 2 \\ 2x^2-ax & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2+2ax) = -4+4a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x^2-ax) = 8-2a \end{array} \right\} \Rightarrow \text{para que } f \text{ sea continua}$$

en $x=2$ debe de ocurrir que $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow -4+4a = 8-2a \Rightarrow 6a = 12 \Rightarrow a = 2$.

$$\text{Por otro lado: } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2+1}{bx-1} = \frac{2}{-b-1} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-x^2+2ax) = -5 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{para que } f \text{ sea continua en } x = -1 \text{ estos dos l\u00edmites}$$

laterales han de ser iguales para que exista el l\u00edmite: $\frac{2}{-b-1} = -5 \Rightarrow 2 = 5b+5 \Rightarrow 5b = -3 \Rightarrow b = -\frac{3}{5}$. Para este

valor de b , f ser\u00e1 continua en $x = -1$, pues se cumple que $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$.

2. Calcular los siguientes l\u00edmites:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x-3} - \sqrt{x-1}}{x-2} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{2x-3} - \sqrt{x-1})(\sqrt{2x-3} + \sqrt{x-1})}{(x-2)(\sqrt{2x-3} + \sqrt{x-1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x-3) - (x-1)}{(x-2)(\sqrt{2x-3} + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{2x-3} + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{2x-3} + \sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9} \right) &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2}{x-3} - \frac{12}{(x+3)(x-3)} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+6-12}{(x+3)(x-3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-6}{(x+3)(x-3)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$3. f(x) = \frac{5x+8}{x^2+x+1}$$

La ecuaci\u00f3n $x^2+x+1=0$ no tiene soluciones reales. Por tanto $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.

$$\frac{5x+8}{x^2+x+1} = 0 \Rightarrow 5x+8=0 \Rightarrow x = -\frac{8}{5}. \text{ Por tanto el punto de corte con el eje } X \text{ es } \left(-\frac{8}{5}, 0 \right).$$

$$\frac{5 \cdot 0 + 8}{0^2 + 0 + 1} = \frac{8}{1} = 8, \text{ con lo que el punto de corte con el eje } Y \text{ es } (0, 8).$$

Como el denominador nunca se anula, no es posible que exista $k \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = \pm\infty$, es decir, la funci\u00f3n **no tiene as\u00edntotas verticales**.

Por otro lado, se tiene que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x+8}{x^2+x+1} = 0$, con lo que la recta $y=0$ (el eje X) **es una as\u00edntota horizontal**.

La funci\u00f3n **no tiene as\u00edntotas oblicuas** (entre otras cosas porque tiene una as\u00edntota horizontal).

$$f'(x) = \frac{5(x^2 + x + 1) - (5x + 8)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{5x^2 + 5x + 5 - 10x^2 - 5x - 16x - 8}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{-5x^2 - 16x - 3}{(x^2 + x + 1)^2}$$

Para hallar los puntos críticos o singulares igualamos la derivada a cero y resolvemos la ecuación:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -5x^2 - 16x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

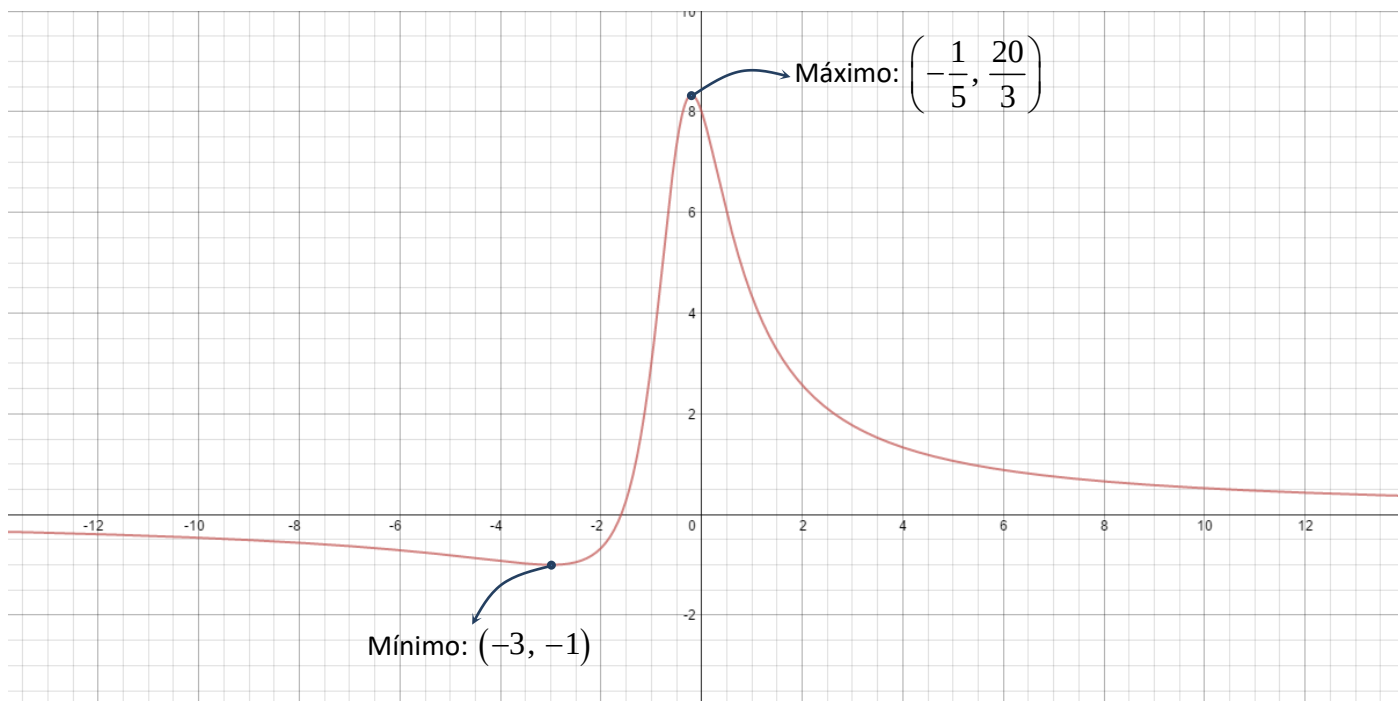
Ahora decidimos la monotonía y los extremos relativos:

	$(-\infty, -3)$	$\left(-3, -\frac{1}{5}\right)$	$\left(-\frac{1}{5}, +\infty\right)$
Signo de f'	-	+	-
Monotonía	↓↓	↑↑	↓↓

De la tabla anterior se deduce que:

- f es estrictamente decreciente en $(-\infty, -3) \cup \left(-\frac{1}{5}, +\infty\right)$.
- f es estrictamente creciente en $\left(-3, -\frac{1}{5}\right)$.
- f tiene un mínimo relativo en $x = -3$; concretamente el mínimo relativo es $(-3, -1)$.
- f tiene un máximo relativo en $x = -\frac{1}{5}$; en concreto el máximo relativo es $\left(-\frac{1}{5}, \frac{20}{3}\right) = (-0,2, 8,3)$.

Representación gráfica:



$$4. \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-2x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-2x) - \sqrt{x}(-2)}{(1-2x)^2} = \frac{1-2x+4x}{2\sqrt{x}(1-2x)^2} = \frac{2x+1}{2\sqrt{x}(1-2x)^2}. \text{ Por tanto, se tiene que}$$

$$f(1) = -1 \text{ y } f'(1) = \frac{3}{2}. \text{ Así, la recta tangente en } x=1 \text{ es: } y - (-1) = \frac{3}{2}(x-1) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}.$$

5. $g(x) = ax^4 + bx + c \Rightarrow g'(x) = 4ax^3 + b$

Como g tiene un máximo relativo en el punto $(1, -1)$, esto se traduce en dos condiciones: $g(1) = -1$, $g'(1) = 0$. Además, como la recta tangente a la gráfica de $g(x)$, en $x = 0$ es paralela a la recta $y = 4x$, entonces $g'(0) = 4$. Escribamos las tres condiciones anteriores en forma de sistema:

$$\begin{cases} g(1) = -1 \\ g'(1) = 0 \\ g'(0) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = -1 \\ 4a + b = 0 \\ b = 4 \end{cases} \quad . \text{ De aquí es muy fácil deducir que } a = -1, b = 4 \text{ y } c = -4.$$

6. Derivadas:

a) $f(x) = \frac{2(\sqrt{x}+2)^2}{\sqrt{x}+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2 \cdot 2(\sqrt{x}+2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1) - 2(\sqrt{x}+2)^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} =$

$$= \frac{2(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}+2)^2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{(\sqrt{x}+2)(2(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}+2))}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{(\sqrt{x}+2)\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

También se puede escribir la función desarrollando el cuadrado del numerador: $f(x) = \frac{2x+8\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+1}$.

$$f'(x) = \frac{\left(2 + \frac{4}{\sqrt{x}}\right)(\sqrt{x}+1) - (2x+8\sqrt{x}+8) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{\frac{(2\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} - \frac{x+4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} =$$

$$= \frac{2x+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}+4-x-4\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{x\sqrt{x}+2x}{x(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{x(\sqrt{x}+2)}{x(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

b) $f(x) = \ln\left(\ln \frac{1}{x}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\ln \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{\ln 1 - \ln x} \cdot \frac{x}{1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-x}{-x^2 \ln x} = \frac{1}{x \ln x}$

También se puede hacer así, aplicando previamente las propiedades de los logaritmos:

$$f(x) = \ln\left(\ln \frac{1}{x}\right) = \ln(\ln 1 - \ln x) = \ln(-\ln x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{-\ln x} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x \ln x}$$

c) $f(x) = \ln(\sin x) - \frac{x \cos x}{\sin x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x - \frac{(\cos x - x \sin x) \sin x - x \cos x \cos x}{\sin^2 x} =$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos x \sin x - x \sin^2 x - x \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x \sin x - \cos x \sin x + x \sin^2 x + x \cos^2 x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{x(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{x}{\sin^2 x}$$