

1. Dada la función $f(x) = \frac{-2x+6}{2x+3}$, se pide:
- [1 punto]** ¿Cuál es su dominio? Calcular sus puntos de corte con los ejes.
 - [0,5 puntos]** Hallar las asíntotas horizontales y verticales de la función.
 - [0,5 puntos]** Representarla gráficamente.

2. **[2 puntos]** Consideremos la siguiente función definida por trozos:
$$f(x) = \begin{cases} 3x+5 & \text{si } x < -2 \\ 3 & \text{si } x = -2 \\ \frac{x-1}{x+5} & \text{si } -2 < x < 3 \\ -x^2+x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Estudiar de manera razonada la continuidad de f en los puntos críticos $x = -2$ y $x = 3$. Caso de no ser continua en alguno de ellos explicar el tipo de discontinuidad existente.

3. Calcular los siguientes límites. Si alguno de ellos el resultado es inmediato, justifica la razón por la que se obtiene ese resultado.

a) **[1 punto]** $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 + 3x + 2}$

b) **[1 punto]** $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + x^2 - 2}{x^3 - 5x - 4}$

c) **[0,5 puntos]** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 2x + 3x^2 + 5x^3}{2 - 2x - 6x^2}$

d) **[0,5 puntos]** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8x^3 + 6x^2 - 3x + 1}{4x^3 - 5x^2 + 10}$

4. Dada la función racional $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4}$, se pide:

- [0,5 puntos]** Dominio de la función.
- [1 punto]** Puntos de corte con los ejes.
- [1 punto]** Asíntotas verticales y horizontales.
- [0,5 puntos]** Representación gráfica aproximada.

Soluciones

1. Dada la función $f(x) = \frac{-2x+6}{2x+3}$, se pide:

a) **[1 punto]** ¿Cuál es su dominio? Calcular sus puntos de corte con los ejes.

Puesto que $2x+3=0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$, el dominio de f es $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

Haciendo $x=0$, se tiene que $f(0) = \frac{-2 \cdot 0 + 6}{2 \cdot 0 + 3} = \frac{6}{3} = 2$, con lo que el punto de corte con el eje Y es $(0, 2)$.

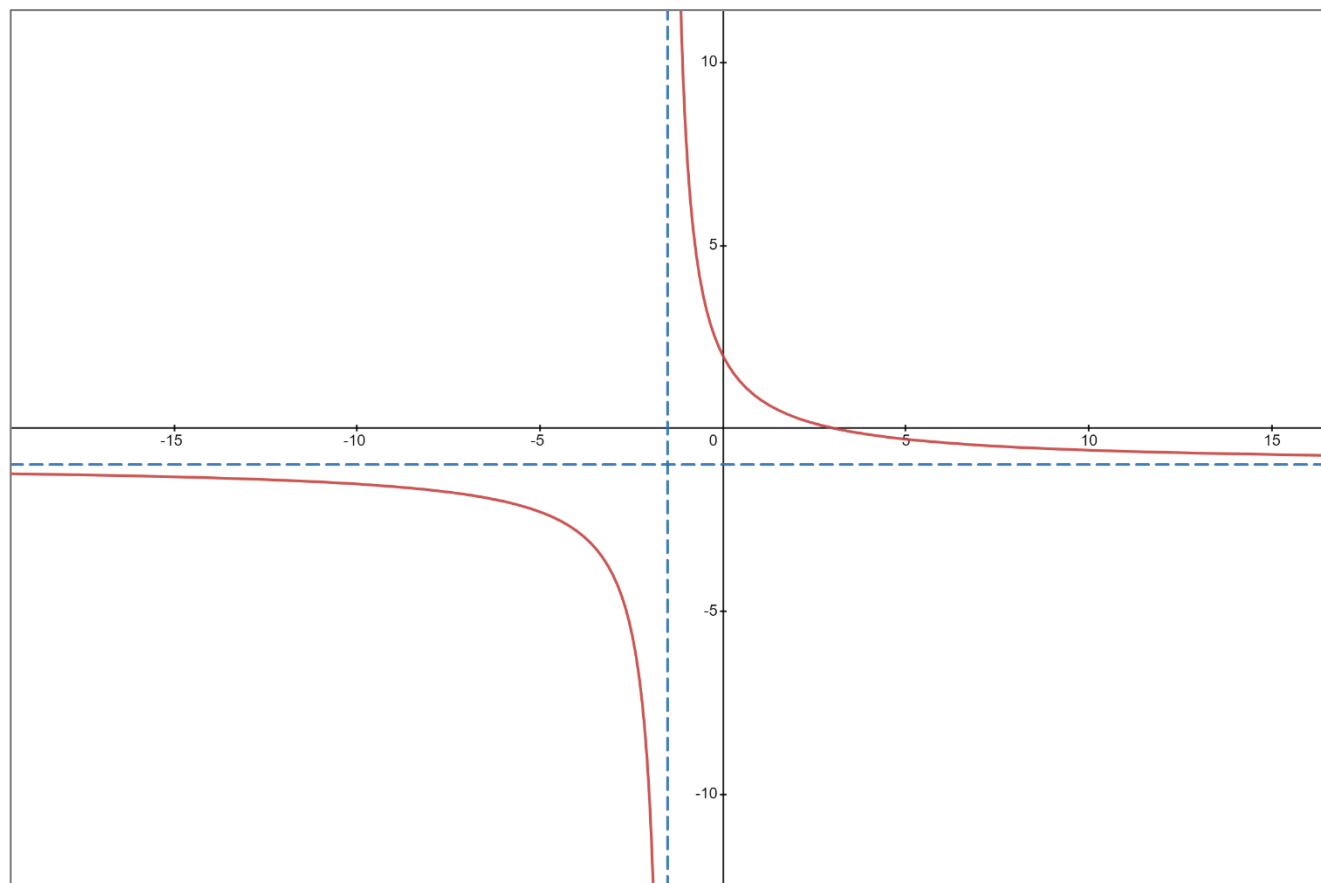
Igualando $f(x)$ a 0, tenemos: $\frac{-2x+6}{2x+3} = 0 \Rightarrow -2x+6=0 \Rightarrow -2x=-6 \Rightarrow x=3$. Por tanto, el punto de corte con el eje X es $(3, 0)$.

b) **[0,5 puntos]** Hallar las asíntotas horizontales y verticales de la función.

En una función del tipo $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ con $c \neq 0$, la asíntota vertical es $x = -\frac{d}{c}$ y la asíntota horizontal es

$y = \frac{a}{c}$. En este caso la asíntota vertical es $x = -\frac{3}{2}$ y la asíntota horizontal es $y = \frac{-2}{2} \Rightarrow y = -1$.

c) **[0,5 puntos]** Representarla gráficamente.



2. [2 puntos] Consideremos la siguiente función definida por trozos: $f(x) = \begin{cases} 3x+5 & \text{si } x < -2 \\ 3 & \text{si } x = -2 \\ \frac{x-1}{x+5} & \text{si } -2 < x < 3 \\ -x^2+x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$.

Estudiar de manera razonada la continuidad de f en los puntos críticos $x = -2$ y $x = 3$. Caso de no ser continua en alguno de ellos explicar el tipo de discontinuidad existente.

Estudio de la continuidad en $x = -2$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} (3x+5) = 3 \cdot (-2) + 5 = -6 + 5 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-1}{x+5} = \frac{-2-1}{-2+5} = \frac{-3}{3} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -1. \text{ Sin embargo } f(-2) = 3. \text{ Puesto}$$

que $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \neq f(-2)$, f no es continua en $x = -2$. Al existir el límite de la función en el punto, pero ser distinto de la imagen de la función en el punto, f presenta una discontinuidad evitable en $x = -2$.

Estudio de la continuidad en $x = 3$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-1}{x+5} = \frac{3-1}{3+5} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (-x^2+x) = -3^2+3 = -9+3 = -6 \end{aligned} \right\}. \text{ Puesto que los límites laterales son distintos, no existe } \lim_{x \rightarrow 3} f(x), \text{ con lo que } f \text{ no es continua en } x = 3. \text{ Al ser los límites laterales finitos y distintos, la función presenta}$$

una discontinuidad de salto finito en $x = 3$.

3. Calcular los siguientes límites. Si alguno de ellos el resultado es inmediato, justifica la razón por la que se obtiene ese resultado.

a) [1 punto] $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{2 \cdot (-2)^2 - (-2) + 1}{(-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 2} = \frac{8 + 2 + 1}{4 - 6 + 2} = \left[\frac{11}{0} \right] = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow -2^- \\ -\infty & \text{si } x \rightarrow -2^+ \end{cases}$.

b) [1 punto] $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + x^2 - 2}{x^3 - 5x - 4} = \frac{(-1)^4 + (-1)^2 - 2}{(-1)^3 - 5 \cdot (-1) - 4} = \frac{1 + 1 - 2}{-1 + 5 - 4} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)} \cdot (x^3 - x^2 + 2x - 2)}{\cancel{(x+1)} \cdot (x^2 - x - 4)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x^2 - x - 4} = \frac{(-1)^3 - (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 2}{(-1)^2 - (-1) - 4} = \frac{-1 - 1 - 2 - 2}{1 + 1 - 4} = \frac{-6}{-2} = 3.$

c) [0,5 puntos] $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 2x + 3x^2 + 5x^3}{2 - 2x - 6x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3}{-6x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{5}{6}x \right) = -\frac{5}{6} \cdot (-\infty) = +\infty$

d) [0,5 puntos] $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8x^3 + 6x^2 - 3x + 1}{4x^3 - 5x^2 + 10} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8x^3}{4x^3} = \frac{-8}{4} = -2.$

4. Dada la función racional $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4}$, se pide:

a) **[0,5 puntos]** Dominio de la función.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2. \text{ Entonces } \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}.$$

b) **[1 punto]** Puntos de corte con los ejes.

Haciendo $x = 0$, se tiene que $f(0) = \frac{-4}{-4} = 1$, con lo que el punto de corte con el eje Y es $(0, 1)$.

$$\text{Igualando } f(x) \text{ a } 0, \text{ tenemos: } \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - (-16)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} =$$

$$= \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -4 \end{cases}. \text{ Entonces los puntos de corte con el eje } X \text{ son } (1, 0) \text{ y } (-4, 0).$$

c) **[1 punto]** Asíntotas verticales y horizontales.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4} = \left[\frac{-6}{0} \right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow -2^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow -2^+ \end{cases}; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4} = \left[\frac{-6}{0} \right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 2^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 2^+ \end{cases}.$$

De aquí se deduce que $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1. \text{ Entonces } y = 1 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

d) **[0,5 puntos]** Representación gráfica aproximada.

