

1. [5 puntos; 1 punto por apartado] Calcular los siguientes límites justificando, de manera razonada, el resultado de cada uno de ellos:

a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 - 3x - 1}{2x^2 + 6x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 12x^3 + x - 6}{-4x^3 - 9x - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 + 6x - 8}{x^3 - 3x + 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - 2x)$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x+7} - 3}$

2. [2 puntos] Dada la función definida por trozos $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 3 & \text{si } x < 1 \\ \frac{x-13}{2x-6} & \text{si } 1 \leq x < 3, \text{ debes } \underline{\text{estudiar de manera}} \\ -x+6 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

razonada la continuidad de la función en los puntos $x = 1$ y $x = 3$. Caso de que no sea continua en alguno de ellos, explicar el tipo de discontinuidad que se presenta.

3. Se considera la siguiente función definida por trozos: $f(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{x-1} & \text{si } x < -2 \\ \frac{4}{x-2} & \text{si } -2 \leq x < 4. \text{ Se pide:} \\ \frac{3}{2}x - 4 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

- a) [2 puntos] Estudiar, de manera razonada, su continuidad en los puntos críticos $x = -2$ y $x = 4$. Caso de que no sea continua en alguno de ellos, explicar el tipo de continuidad existente.
- b) [1 punto] ¿Hay algún otro punto en el que la función no sea continua? Si la respuesta es afirmativa, justificarlo de manera razonada y explicar el tipo de discontinuidad que se presenta en ese punto.

Soluciones

1. [5 puntos] Calcular los siguientes límites justificando, de manera razonada, el resultado de cada uno de ellos:

$$a) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 - 3x - 1}{2x^2 + 6x} = \left[\frac{4 \cdot (-3)^2 - 3 \cdot (-3) - 1}{2 \cdot (-3)^2 + 6 \cdot (-3)} = \frac{36 + 9 - 1}{18 - 18} = \frac{44}{0} \right] = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow -3^- \\ -\infty & \text{si } x \rightarrow -3^+ \end{cases}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 12x^3 + x - 6}{-4x^3 - 9x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x^3 + 3x^2 + x - 6}{-4x^3 - 9x - 1} = \frac{-12}{-4} = 3. \text{ [Los grados son iguales]}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 + 6x - 8}{x^3 - 3x + 2} = \left[\frac{5 \cdot (-2)^2 + 6 \cdot (-2) - 8}{(-2)^3 - 3 \cdot (-2) + 2} = \frac{20 - 12 - 8}{-8 + 6 + 2} = \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2) \cdot (5x-4)}{(x+2) \cdot (x^2 - 2x + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x-4}{x^2 - 2x + 1} = \frac{5 \cdot (-2) - 4}{(-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 1} = \frac{-10 - 4}{4 + 4 + 1} = \frac{-14}{9}.$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - 2x \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - 2x) \cdot (\sqrt{x^2 + x} + 2x)}{\sqrt{x^2 + x} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x})^2 - (2x)^2}{\sqrt{x^2 + x} + 2x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 4x^2}{\sqrt{x^2 + x} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + x}{\sqrt{x^2 + x} + 2x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2}{x + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty.$$

También se puede finalizar así:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 4x^2}{\sqrt{x^2 + x} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + x}{\sqrt{x^2 + x} + 2x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-3x^2 + x}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^2 + x} + 2x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} + \frac{2}{x}} = \left[\frac{-3}{0^+} \right] = -\infty.$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x+7} - 3} = \left[\text{INDET } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 2x)(\sqrt{x+7} + 3)}{(\sqrt{x+7} - 3)(\sqrt{x+7} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 2x)(\sqrt{x+7} + 3)}{x + 7 - 9} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)(\sqrt{x+7} + 3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[x(\sqrt{x+7} + 3) \right] = 2 \cdot (\sqrt{9} + 3) = 2 \cdot 6 = 12.$$

$$2. [2 puntos] \text{ Dada la función definida por trozos } f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 3 & \text{si } x < 1 \\ \frac{x-13}{2x-6} & \text{si } 1 \leq x < 3, \text{ debes } \underline{\text{estudiar de manera}} \\ -x+6 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

razonada la continuidad de la función en los puntos $x=1$ y $x=3$. Caso de que no sea continua en alguno de ellos explicar el tipo de discontinuidad que se presenta.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2 + x + 3) = -1 + 1 + 3 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-13}{2x-6} = \frac{1-13}{2-6} = \frac{-12}{-4} = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3. \text{ Además, } f(1) = \frac{1-13}{2-6} = \frac{-12}{-4} = 3.$$

Por tanto, se tiene que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 = f(1)$, lo que indica que f es continua en el punto $x=1$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-13}{2x-6} = \frac{3-13}{6-6} = \left[\frac{-10}{0} \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (-x+6) = -3+6 = 3 \end{aligned} \right\} . \text{ Como los l\u00edmites laterales son distintos, deducimos que no}$$

existe $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ y, por tanto, f **no es continua** en $x=3$. Al ser uno de los l\u00edmites infinito y el otro finito, en el punto $x=3$ hay una discontinuidad de salto infinito.

$$3. \text{ Se considera la siguiente funci\u00f3n definida por trozos: } f(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{x-1} & \text{si } x < -2 \\ 4 & \text{si } -2 \leq x < 4 \\ \frac{3}{2}x-4 & \text{si } x \geq 4 \end{cases} . \text{ Se pide:}$$

a) [2 puntos] **Estudiar, de manera razonada**, su continuidad en los puntos cr\u00edticos $x=-2$ y $x=4$. Caso de que no sea continua en alguno de ellos, explicar el tipo de continuidad existente.

b) [1 punto] \u00bfHay alg\u00fan otro punto en el que la funci\u00f3n no sea continua? Si la respuesta es afirmativa, justificarlo de manera razonada y explicar el tipo de discontinuidad que se presenta en ese punto.

$$a) \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x-4}{x-1} = \frac{-2-4}{-2-1} = \frac{-6}{-3} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4}{x-2} = \frac{4}{-2-2} = \frac{4}{-4} = -1 \end{aligned} \right\} . \text{ Puesto que los l\u00edmites laterales son distintos, hemos de}$$

deducir que no existe $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ y, por tanto, f **no es continua** en el punto $x=-2$. En tal punto hay una discontinuidad de salto finito por ser los l\u00edmites laterales n\u00fameros reales y distintos.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{4}{x-2} = \frac{4}{4-2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{3}{2}x-4 \right) = \frac{3}{2} \cdot 4 - 4 = 6 - 4 = 2 \end{aligned} \right\} . \text{ Entonces } \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 2 . \text{ Adem\u00e1s, tambi\u00e9n es claro que}$$

$f(4) = 2$. Por tanto, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 2 = f(4)$, con lo que f **es continua** en el punto $x=4$.

b) El dominio de la funci\u00f3n del primer trozo, $y = \frac{x-4}{x-1}$, no incluye al punto $x=1$, pero este punto no es menor que -2 , con lo que en este caso no tenemos nada que decir.

El dominio de la funci\u00f3n del segundo trozo, $y = \frac{4}{x-2}$, no incluye al punto $x=2$, el cual s\u00ed que se encuentra entre -2 y 4 . Por tanto, en este punto se podr\u00eda dar una discontinuidad. Estudiemos los l\u00edmites laterales como en el apartado anterior.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4}{x-2} = \left[\frac{4}{0} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4}{x-2} = \left[\frac{4}{0} \right] = +\infty \end{aligned} \right\} . \text{ De aqu\u00ed se desprende que no existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x), \text{ con lo que } f \text{ no es}$$

continua en el punto $x=2$. Como los l\u00edmites laterales en este punto son infinitos, pero de distinto signo, se trata de una discontinuidad de salto infinito.